Model Parametrik untuk Tabel Mortalitas

[1]Elina Juliani, [2]Lisnur Wachidah, [3]Sutawanir Darwis
[1,2,3]*Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No. 1 Bandung 40116*
e-mail : [1]elina.juliani@yahoo.com, [2]lisnur_w@yahoo.co.id, [3]darwis@gmail.com

Abstract. Survival analysis is a statistical method that relates to the time to the occurrence of an event that usually in the form of death. Assessing death opportunities can be used to help estimate the human age for life, as a basis for calculating insurance premiums, and assessing population growth or reductions. The chance of one's death (q_x) presented in table form is known as the mortality table, where one of the estimation methods for q_x is the moment method. Furthermore, the value of q_x calculation results compared with q_x Table Mortality Indonesia in 2011. The purpose of this thesis is to know the rate of mortality µ_x with Gompertz and Weibull models. Estimation of Gompertz and Weibull model parameters is done by minimizing Sum Squares Error (SSE). The material used to apply the parametric model for the mortality table in this thesis is secondary data. Data obtained from the Life Insurance Policy holders (AJB) Bumiputera 1912 on the date of birth, insurance start date and date of death, obtained from claim data died on AJB Bumiputera 1912. Based on SSE model Gompertz is the model that best match the data pattern because 24,595 <28,105 .

Keywords: mortality table, survival function, moment method, Gompertz model, Weibull model, Sum Squares Error (SSE).

Abstrak. Analisis survival adalah suatu metode statistik yang berhubungan dengan waktu sampai terjadinya suatu kejadian yang biasanya berupa kematian. Penaksiran peluang meninggal dapat digunakan untuk membantu menaksir usia manusia untuk hidup, sebagai landasan perhitungan premi dalam asuransi, dan menaksir pertumbuhan atau pengurangan populasi. Peluang meninggal seseorang (q_x) yang disajikan dalam bentuk tabel dikenal dengan sebutan tabel mortalitas, dimana salah satu metode penaksir untuk q_x adalah metode momen. Selanjutnya nilai q_x hasil perhitungan dibandingkan dengan q_x Tabel Mortalitas Indonesia tahun 2011. Tujuan skripsi ini adalah mengetahui laju mortalitas μ_x dengan model Gompertz dan Weibull. Penaksiran parameter model Gompertz dan Weibull dilakukan dengan cara meminimumkan Sum Squares Error (SSE). Bahan yang digunakan untuk mengaplikasikan model parametrik untuk tabel mortalitas dalam skripsi ini adalah data sekunder. Data diperoleh dari pemegang polis Asuransi Jiwa Bersama (AJB) Bumiputera 1912 mengenai tanggal lahir, tanggal mulai asuransi dan tanggal meninggal, diperoleh dari data klaim meninggal pada AJB Bumiputera 1912. Berdasarkan SSE model Gompertz adalah model yang paling cocok dengan pola data karena 24,595 < 28,105.

Kata Kunci : tabel mortalitas, fungsi survival, metode momen, model Gompertz, model Weibull, *Sum Squares Error (SSE).*

A. Pendahuluan

Analisis survival atau analisis data ketahanan hidup adalah suatu metode statistik untuk menganalisis data dengan variabel terikat yang diperhatikan berupa waktu sampai terjadinya suatu kejadian (Kleinbaum dan Klein, 2005). Salah satu contoh kejadian yang diamati dalam analisis survival adalah kematian.

Dalam kehidupan sehari-hari, kita tidak dapat menentukan kapan seseorang akan meninggal dunia. Walaupun demikian kita dapat menghitung rata-rata usia seseorang yang telah meninggal sebelumnya sehingga secara matematika peluang hidup dapat diprediksi. Peluang meninggal seseorang yang disajikan dalam bentuk tabel dikenal dengan sebutan life table (tabel hayat/tabel mortalitas).

Cukup banyak manfaat yang diperoleh dari tabel mortalitas, bidang asuransi untuk menentukan besar premi yang harus dibayar oleh pemegang asuransi, dan bidang kesehatan dalam menentukan peluang seseorang dapat bertahan hidup dalam jangka waktu tertentu, oleh karena itu perlu disusun tabel mortalitas.

Pembuatan tabel mortalitas dapat menggunakan dua prosedur, yaitu non-parametrik dan parametrik. Menurut Bowers dan kawan-kawan (1997), model parametrik lebih mudah untuk mengestimasi beberapa parameter dari suatu fungsi data mortalitas.

Model parametrik untuk tabel mortalitas yang akan dikaji dalam skripsi ini adalah model Gompertz dan Weibull. Untuk menaksir parameter model Gompertz dan Weibull dilakukan dengan cara meminimumkan SSE (Sum Squares Error). Setelah parameter model diketahui maka selanjutnya membandingkan nilai SSE Weibull dan SSE Gompertz, semakin kecil nilai SSE maka semakin cocok model tersebut dengan data. Adapun tujuan yang ingin dicapai dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui proses pemodelan mortalitas menggunakan model Gompertz dan Weibull.
2. Untuk mengetahui taksiran parameter model Gompertz dan Weibull menggunakan pendekatan kuadrat terkecil.
3. Untuk mengetahui perbandingan akurasi model Gompertz dan Weibull.

B. Landasan Teori

1. Fungsi *Survival*

Penaksiran peluang hidup dapat digunakan untuk membantu menaksirkan usia seseorang untuk hidup, sebagai landasan perhitungan premi dalam asuransi, dan menaksir pertumbuhan atau pengurangan populasi. Alat untuk menaksir peluang hidup dikenal dengan fungsi survival. Biasanya fungsi tersebut dibahas dalam dunia asuransi jiwa. Misalkan *X* adalah peubah acak waktu kontinu yang menyatakan usia kematian dari seseorang yang baru dilahirkan, dan *X* memiliki fungsi distribusi *F(x)* sebagai berikut, (Bowers, 1997) :

$$F(x) = P(X \leq x) \qquad x \geq 0, \qquad ...(2.1)$$

dan fungsi survivalnya didefinisikan dengan :

$$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x) \qquad x \geq 0 \qquad ...(2.2)$$

2. Fungsi Hazard

Notasi yang digunakan untuk fungsi hazard adalah μ_x dan didefinisikan sebagai berikut, , (Kudus dan Muchlis, 2013) :

$$\mu_x = \frac{f(x)}{S(x)} \qquad ...(2.3)$$

Fungsi hazard menyatakan laju mortalitas sesaat dari unit pengamatan pada waktu *x*, dengan syarat bahwa unit pengamatan tersebut hidup sampai waktu *x*. Laju mortalitas suatu individu pada saat *x* adalah peluang orang tersebut akan meninggal pada interval berikutnya, sedangkan sampai saat *x*+1 orang tersebut masih hidup. Karena $f(x) = -\frac{d}{dx}S(x)$ maka laju mortalitasnya adalah, (London, 1997):

$$\mu_x = -\frac{d \ln S(x)}{dx} \qquad ...(2.4)$$

sehingga diperoleh hubungan:

$$S(x) = exp\left[-\int_0^x \mu_y \; dy\right] \qquad ...(2.5)$$

3. Mortalitas

Menurut (Oktavianto, 2016), mortalitas atau kematian merupakan salah satu dari tiga komponen demografi selain fertilitas dan migrasi, yang dapat mempengaruhi jumlah dan komposisi umur penduduk. Organisasi Kesehatan Dunia (*World Health Organization*) mendefinisikan mortalitas sebagai suatu peristiwa menghilangnya kehidupan secara permanen, yang bisa terjadi setiap saat setelah kelahiran hidup.

Peluang meninggal seseorang yang disajikan dalam bentuk tabel dikenal dengan sebutan *life table* (tabel hayat/tabel mortalitas). Tabel mortalitas ini berisi daftar dari l_X, d_X ,q_X dan sebagainya. Dimana l_x adalah jumlah orang yang hidup pada usia *x*, sedangkan d_x menyatakan jumlah orang dari l_x yang meninggal dalam setahun, jadi antara usia *x* dan *x*+1 tahun.

4. Model Gompertz dan Model Weibull

Menurut Carriere (1992), model Gompertz merupakan alat yang baik untuk membandingkan tabel angka kematian. Laju mortalitas model Gompertz yaitu :

$$\mu_x = Bc^x \qquad ...(2.6)$$

dimana B > 0, c > 0, dan $x \geq 0$.

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi yang sering digunakan dalam analisis data *survival*. Percepatan mortalitas dari model Weibull yaitu:

$$\mu_x = k.x^n \qquad ...(2.7)$$

dimana $x \geq 0$, $k > 0$, dan $n > -1$.

5. *Exact Eksposur*

Untuk setiap orang dalam pengamatan terdapat tiga usia penting yaitu: Usia sebenarnya saat masuk pengamatan (y_i), usia keluar dari pengamatan (z_i) karena dijadwalkan untuk berakhirnya suatu pengamatan atau keluar dari pengamatan karena meninggal. Dan kita notasikan usia saat kematian terjadi dengan θ_i, jika orang i tidak meninggal dalam pengamatan tersebut maka $\theta_i = 0$. Oleh karena itu diberikan vektor usia untuk setiap orang yang berada dalam pengamatan, (London, 1997) :

$$v_i' = [y_i, z_i, \theta_i]$$

Langkah selanjutnya adalah mengubah vektor usia menjadi vektor durasi untuk interval $(x, x+1]$, yang menunjukan durasi fraksional dalam $(x, x+1]$ dimana pengamatan dimulai , dijadwalkan berakhir, atau benar-benar berakhir sampai mati. Vektor durasi ditunjukan oleh:

$$u_{i,x}' = [r_i, s_i, \tau_i]$$

6. Hubungan Dasar Moment

Orang i mempunyai dua pilihan dalam selang pengamatan $(x, x+1]$, yaitu masih hidup sampai akhir pengamatan dengan peluang ${}_{s_i - r_i}p_{x+r_i}$ atau meninggal sebelum waktu pengamatan selesai dengan peluang ${}_{s_i - r_i}q_{x+r_i}$.

Dengan menggunakan aproksimasi,

$${}_{si-ri}q_{x+ri} \approx (s_i - r_i).q_x$$

Maka

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{\sum_{i=1}^{n}(s_i - r_i) + \sum_{i=1}^{n}(\tau_i - r_i)} \qquad ...(2.8)$$

7. Tingkat Kematian Pusat

Tingkat kematian pusat disebut tingkat kematian pusat. Ini didefinisikan sebagai nilai rata-rata tertimbang dari laju mortalitas (μ_x).

$$m_x = \hat{\mu}^0_{x+\frac{1}{2}} = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}.q_x} \qquad ...(2.9)$$

8. Pendekatan Kuadrat Terkecil

Untuk menaksir μ diperlukan $\mu^o_{x+\frac{1}{2}}$. Dengan "o" menunjukan taksiran yang dihitung secara langsung dari data sampel dan $x + \frac{1}{2}$ merupakan titik tengah dari interval $(x, x+1]$. Jika domain $\mu^{o}_{x+\frac{1}{2}}$ dari $x = a$ sampai $x = b$. Maka SSE (*Sum Squares Error*) model Gompertz didefinisikan sebagai:

$$SSE = \sum_{x=a}^{b} \left[\beta_0 + \beta_1 \left(x + \frac{1}{2}\right) - \ln\mu^{0}_{x+\frac{1}{2}}\right]^2 \qquad ...(2.10)$$

Dan SSE model Weibull adalah:

$$SSE = \sum_{x=a}^{b} \left[\gamma + \delta \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) - \ln\mu^{0}_{x+\frac{1}{2}}\right]^2 \qquad ...(2.11)$$

9. Asumsi Regresi Linier Sederhana

Pada saat kita menggunakan model regresi di atas, ada beberapa asumsi yang harus terpenuhi, (Achmad,2010) yaitu:

10. Galat ε_i berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan varians σ^2_{ε} ; ε_i ~N(0, σ^2_{ε})
11. Galat ε_i mempunyai varians yang konstan; Var (ε_i) = σ^2_{ε}

Dengan Asumsi tersebut nantinya akan diperoleh penaksir Kuadrat Terkecil biasa (*Oldinary Least Square, OLS)* yang merupakan penaksir tak bias terbaik *(Best Linear Unbiased Estimator, BLUE).*

C. Hasil dan Pembahasan

Data pemegang polis AJB Bumiputera pada yang terdiri dari 200 pemegang polis beserta tanggal lahir, tanggal mulai asuransi, dan tanggal meninggalnya. Untuk mempermudah perhitungan maka perlu mengubah data tanggal lahir, tanggal mulai asuransi, dan tanggal meninggal ke dalam tahun desimal.

Pada Tabel 3.1 diketahui bahwa tanggal lahir orang ke-1 adalah 18 Maret 1970. Dalam satu tahun terdiri dari 365 hari, pada Lampiran 4 tanggal 18 Maret adalah hari ke 77, maka tahun desimalnya adalah:

$$1970 + \frac{77}{365} = 1970{,}21$$

Tabel 3.1 Pemegang Polis AJB Bumiputera dalam Tahun Desimal

No	Tahun Desimal		
	Tanggal Lahir	**Tanggal Mulai Asuransi**	**Tanggal Meninggal**
1	1970,21	2006,25	2016,82
2	1964,67	2006,25	2016,53
.	...	...	...
.	...	...	...
.	...	...	...
199	1958,35	2007,55	2016,79
200	1960,18	2007,42	2016,18

Dari Tabel 3.1 orang ke-1 lahir pada tahun 1970,21 dan mulai masuk asuransi pada tahun 2006,25 serta meninggal pada tahun 2016,82. Dari keterangan tersebut dapat dihitung vektor usia. Vektor usia terdiri dari usia saat masuk Periode Observasi (PO) dinotasikan dengan y_i, usia saat keluar PO (z_i), dan usia saat meninggal (θ_i). Usia saat masuk PO untuk orang ke-1 adalah:

$$\begin{aligned} y_1 &= tanggal\ \ mulai\ asuransi - tanggal\ lahir \\ &= 2006{,}25 - 1970{,}21 \\ &= 36{,}04 \end{aligned}$$

Akhir periode observasinya adalah 31 Desember 2016, maka saat usia keluar P0nya adalah:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2017 - tanggal\ lahir \\ &= 2017 - 1970{,}21 \\ &= 46{,}79 \end{aligned}$$

dan usia saat meninggalnya adalah:

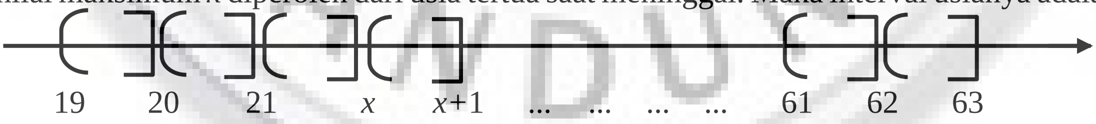
$$\begin{aligned} \theta_1 &= tanggal\ meninggal - tanggal\ lahir \\ &= 2016{,}82 - 1970{,}21 \\ &= 46{,}61 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama untuk pemegang polis ke-2 dan seterusnya disajikan pada Tabel 4.2.

Tabel 3.2 Hasil Perhitungan Vektor Usia Pemegang Polis AJB Bumiputera

No	**Usia Masuk PO**	**Usia Keluar PO**	**Usia Meninggal**
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{y_i}$	$\boldsymbol{z_i}$	$\boldsymbol{\theta_i}$
1	36,04	46,79	46,61
2	41,58	52,33	51,87
...	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...
199	49,20	58,65	58,44
200	47,24	56,82	56,01

Vektor durasi terdiri dari usia masuk terhadap x (r_i), usia keluar tehadap x (s_i), dan usia meninggal terhadap x (τ_i). Untuk menghitung vektor durasi maka dibuat interval usia (*x*,*x*+1]. Untuk nilai minimum *x* di peroleh dari usia termuda saat masuk PO, dan nilai maksimum *x* diperoleh dari usia tertua saat meninggal. Maka interval usianya adalah:



Gambar 3.1 Ilustrasi Interval Usia

Berdasarkan Gambar 3.1 yang telah dibuat, interval usia (19,20] atau untuk $x = 19$. Telah diketahui bahwa banyaknya orang yang berada dalam interval (19,20] adalah $n = 1$ yaitu orang ke-22. Orang ke-22 masuk PO pada usia 19,94 dan keluar pada usia 30,01 serta meninggal pada usia 29,74.

Untuk menghitung usia masuk terhadap $x = 19$. Orang ke-22 masuk pengamatan pada usia 19,94 dimana 19 < 19,94 < 20 maka:

$$r_{22} = y_{22} - x = 19{,}94 - 19 = 0{,}94$$

Artinya orang tersebut mulai berkontribusi dalam interval (19,20] setelah durasi 0,94.

Untuk menghitung usia keluar terhadap $x = 19$. Orang ke-22 meninggalkan pengamatan pada usia 19,94 dimana 19,94 > 20, maka $s_{22} = 1$. Artinya saat keluar dari interval (19,20] orang tersebut masih dalam periode pengamatan.

Untuk menghitung usia meninggal terhadap $x = 19$. Orang ke-22 meninggal pada usia 29,74 dimana 29,74 > 20, maka $s_{22} = 0$. Artinya saat keluar dari interval (19,20] orang tersebut masih hidup.

Pada interval (19,20] terdiri dari satu orang yaitu orang ke-22, menggunakan hasil perhitungan vektor durasi diperoleh $r_{22} = 0{,}94$, $s_{22} = 1$ dan $\tau_{22} = 0$, maka

$$s_{22} - r_{22} = 1 - 0.94 = 0{,}16$$

Dan dengan menggunakan persaamaan 2.35 diperoleh hasil total *Exact Exposure* pada interval (19,20] adalah 0,16.

Pada usia $\boldsymbol{x}$ ($\widehat{\boldsymbol{q}}_x$) Pada interval (28,29], dapat diperoleh peluang meninggal pada usia 28 tahun adalah:

$$\hat{q}_{28} = \frac{d_{28}}{\sum_i (exact\ exposure)_{i,x}} = \frac{1}{13{,}29} = 0{,}07526$$

Dengan cara yang sama untuk usia 29 tahun dan seterusnya disajikan pada Tabel 4.5.

Tabel 3.3 Perhitungan Peluang Meninggal usia *x* ($\hat{q}_x$)

$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{d_x}$	$\boldsymbol{Exact\ Exposure}$	$\widehat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{x}}$
28	1	13,29	0,07526
29	2	13,24	0,15104
...	...	...	...
...	...	...	...
61	3	1,75	1,00000
63	1	0,56	1,00000

Tingkat kematian pusat (m_x) merupakan penaksir $\hat{\mu}^0_{x+\frac{1}{2}}$ yang dihitung (2.9). Berdasarkan Tabel 3.3 untuk $x = 28$ diperoleh hasil sebagai berikut:

$$m_{28} = \hat{\mu}^0_{28+\frac{1}{2}} = \frac{0{,}07526}{1 - (\frac{1}{2} \times 0{,}07526)} = 0{,}07820$$

Artinya tingkat kematian pusat usia 28 tahun adalah 0,07820.

Dengan cara yang sama untuk usia 29 tahun dan seterusnya disajikan pada Tabel 3.3.

Tabel 3.4 Perhitungan Tingkat Kematian Pusat

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{d_x}$	$\boldsymbol{Exact\ Exposure}$	$\widehat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{m_x}$
28	1	13,29	0,07526	0,07820
29	2	13,24	0,15104	0,16338
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
61	3	1,75	1,00000	2,00000
63	1	0,56	1,00000	2,00000

Dari hasil perhitungan di peroleh taksiran parameter fungsi laju mortalitas model Gompertz adalah sebagai berikut:

$$\mu_x = 0{,}00292.(1{,}08433^x)$$

dan fungsi laju mortalitas model Weibull adalah sebagai berikut:

$$\mu_x = 0{,}0000004.(x^{3{,}285})$$

Untuk menghitung SSE model Gompertz menggunakan Persamaan (2.7), hasil perhitungan menggunakan *software* SPSS sebagai berikut:

Tabel 3.5 SSE Model Gompertz

ANOVA[a]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	20,692	1	20,692	26,080	,000[b]
	Residual	24,595	31	,793		
	Total	45,288	32			

a. Dependent Variable: Laju

b. Predictors: (Constant), Usia

Dari Tabel 4.11 diperoleh SSE model Gompertz adalah 24,595.

Untuk menghitung SSE model Weibull dengan menggunakan Persamaan (2.8), hasil perhitungan menggunakan *software* SPSS disajikan pada Tabel 4.15.

Tabel 3.6 SSE Model Weibull

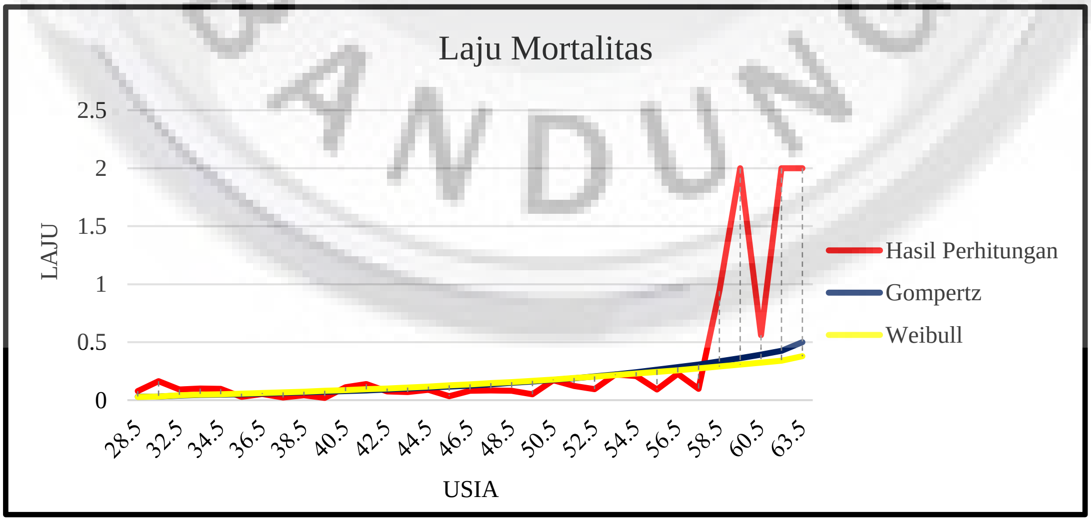
ANOVA[a]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	17,183	1	17,183	18,953	,000[b]
	Residual	28,105	31	,907		
	Total	45,288	32			

a. Dependent Variable: LAJU

b. Predictors: (Constant), USIA

Dari Tabel 4.15 diperoleh SSE model Weibull sebesar 28,105.SSE model Gompertz adalah 24,595 dan SSE model Weibull adalah 28,105. Maka berdasarkan SSE, model Gompertz adalah model yang paling cocok dengan pola data karena 24,595 < 28,105. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Grafik Perbandingan Laju Mortalitas (μ_x)

Dari Gambar 3.2 terlihat bahwa plot model Gompertz lebih dekat dengan plot hasil perhitungan dibandingkan model Weibull.

Kesimpulan

1. Proses pemodelan mortalitas menggunakan model Gompertz dan Weibull adalah: (1) menghitung peluang meninggal *exact exposure*, (2) menghitung tingkat kematian pusat, (3) menaksir parameter model Gompertz dan Weibull menggunakan pendekatan kuadrat terkecil, (4) menghitung laju mortalitas model Gompertz dan Weibull.
2. Dari hasil perhitungan di peroleh taksiran parameter fungsi laju mortalitas model Gompertz adalah sebagai berikut:
   $$\mu_x = 0{,}00292.(1{,}08433^x)$$
   dan fungsi laju mortalitas model Weibull adalah sebagai berikut:
   $$\mu_x = 0{,}0000004.(x^{3{,}285})$$
3. SSE model Gompertz adalah 24,595 dan SSE model Weibull adalah 28,105. Jadi berdasarkan SSE, model Gompertz adalah model paling cocok dengan pola data karena 24,595 < 28,105.

Daftar Pustaka

Achmad, A.I. (2010). *Analisis Regresi untuk Praktisi.* Bandung: Pustaka Ceria.

Bowers, N.L.dkk. (1997). *Actuarial Mathematics*. Illinois: The Society of Actuaries.

Carriere, J.F. (1992). Parametric Models For Life Tables. *Transactions of Society of Actuaries*, Vol44, (Online), (https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwiHo872hsbAhVCRo8KHZ92A30QFgglMAA&url=https%3A%2F%2Fwww.soa.org%2Flibrary%2Fresearch%2Ftransactions-of-society-ofactuaries%2F1981%2Fjanuary%2Ftsa81v338.pdf&usg=AFQjCNGEyqxVtNHVsI_ZPx14UJy48cUFpw, diunduh tanggal 10 Maret 2017).

Kleinbaum, D.G. dan Klein, Mitchel. (2005) . *Survival Analysis a self-learning text*. Second edition. New York: Springer.

Kudus, Abdul dan Muchlis R.D. (2013) . *Dasar-dasar Reliabilitas*. Bandung.

London, Dick. (1997). *Survival Models and Their Estimation.* Third edition. Winsted: Actex Publication.