

Penerapan Diagram Kendali *Mixed EWMA-CUSUM* dengan *Modified Fast Initial Response* dan *Headstart* pada Pengendalian Kualitas Produk

¹Elia Rizki Prihatini, ²Lisnur Wachidah, ³Suliadi

^{1,2}Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung,
Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

email: ¹eliarizkiprihatini@gmail.com, ²lisnur_w@yahoo.co.id, ³suliadi@gmail.com

Abstrak. Pengendalian kualitas statistik digunakan untuk menyelidiki secara cepat terjadinya pergeseran rata-rata yang dapat menyebabkan proses produksi menjadi *out of control*. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelidiki pergeseran rata-rata adalah menggunakan diagram kendali, diagram kendali pertama yang dikenal cukup populer adalah *Shewhart*. Namun diagram kendali tersebut kurang efektif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata yang kecil ($< 1,5\sigma$) sehingga dikembangkan diagram kendali *Cumulative-Sum* (CUSUM) dan *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA). Kemudian untuk meningkatkan kemampuan deteksi dari diagram kendali, maka CUSUM dan EWMA digabung menjadi diagram kendali baru yaitu *mixed EWMA-CUSUM* (MEC) dengan menggunakan dua fitur tambahan yaitu *headstart* dan *fast initial response* (FIR). Dalam penelitian ini, akan dibahas mengenai penerapan diagram kendali *mixed EWMA-CUSUM* dengan *modified fast initial response* dan *headsart* (MECFIRHS) pada pengendalian kualitas produk. Data yang digunakan adalah data sekunder mengenai karakteristik mutu tebal kayu lapis yang diproduksi PT. XYZ Jakarta. Penerapan pada pengamatan proses produksi kayu lapis menunjukkan hasil bahwa proses dalam keadaan terkendali.

Kata Kunci: EWMA, CUSUM, *mixed EWMA-CUSUM*, *headstart*, *fast initial response*.

A. Pendahuluan

Semakin ketatnya persaingan di era globalisasi menyebabkan setiap perusahaan dituntut untuk berkompetisi dengan perusahaan lain didalam industri yang sama dan harus mampu memberikan jaminan mutu agar mampu memenuhi tuntutan konsumen. Namun seringkali terjadi ketidakpuasan konsumen terhadap suatu produk dikarenakan kualitas yang dihasilkan lebih rendah dari standar yang ditetapkan. Pengendalian kualitas sangat dibutuhkan dalam proses produksi guna menjaga kestabilan suatu produk. Tujuan pokok pengendalian kualitas statistik adalah menyelidiki dengan cepat terjadinya pergeseran rata-rata proses sehingga penyelidikan terhadap proses dan tindakan pembetulan dapat dilakukan sebelum terlalu banyak diproduksinya unit yang tidak memenuhi standar. Diagram kendali adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk mendeteksi pergeseran rata-rata dalam sebuah proses produksi.

Diagram kendali pertama yang dikenal cukup populer adalah diagram kendali *Shewhart* yang ditemukan oleh Dr. Walter Andrew Shewart (1924). Namun diagram kendali tersebut kurang efektif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata yang kecil ($< 1,5\sigma$), sehingga kesalahan kecil yang dapat menurunkan kualitas produk dalam suatu proses produksi tidak dapat terdeteksi. Oleh karena itu, dikembangkanlah diagram kendali *Cumulative-Sum* (CUSUM) yang ditemukan oleh Page (1954) dan diagram kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) yang ditemukan oleh Robert (1959). Diagram kendali CUSUM dan EWMA ini sangat efektif untuk mendeteksi pergeseran rata-rata yang kecil atau perubahan yang terjadi pada kualitas produk saat proses produksi. Dalam rangka meningkatkan kemampuan deteksi dari diagram kendali, para peneliti telah menyarakan rangkaian dan modifikasi tertentu. Maka dari itu, Abbas dkk (2013) menggabungkan rangkaian diagram kendali CUSUM dan EWMA menjadi diagram kendali baru yaitu *mixed EWMA-CUSUM* (MEC). Kemudian untuk memperluas struktur dari diagram kendali *mixed EWMA-CUSUM*, digunakan dua fitur

tambahan yaitu *headstart* dan *fast initial response* (FIR) dengan tujuan dapat lebih meningkatkan kepekaan dari diagram kendali tersebut dalam mendeteksi pergeseran rata-rata yang dapat menyebabkan proses produksi menjadi *out of control*.

B. Landasan Teori

Pengendalian Kualitas Statistika

Pengendalian kualitas statistik menurut Sudjana (2002) merupakan teknik penyelesaian masalah yang digunakan sebagai pemonitor, pengendali, penganalisis, pengelola dan memperbaiki proses dengan menggunakan metode-metode statistik. Tujuan dari digunakannya pengendalian kualitas statistika adalah untuk menjaga standar yang seragam dari kualitas hasil produksi pada tingkat biaya yang minimum, penggunaan alat produksi lebih efisien, serta mengurangi *rework* dan pembuangan. Salah satu teknik atau metode yang dapat digunakan dalam proses pengendalian adalah menggunakan diagram kendali.

Diagram Kendali

Diagram kendali adalah sebuah grafik yang memberi gambaran tentang perilaku sebuah proses. Diagram kendali ini digunakan secara luas untuk menyelidiki secara cepat terjadinya sebab-sebab terduga sehingga penyelidikan terhadap suatu proses dan tindakan perbaikan dapat dilakukan untuk meminimalisir produk yang tidak sesuai. Selain itu, diagram kendali juga digunakan untuk memahami apakah sebuah proses produksi berjalan dalam kondisi yang terkontrol atau tidak dengan cara menetapkan batas-batas kendali, yaitu batas kendali atas (BKA), garis pusat atau garis tengah, dan batas kendali bawah (BKB). Lebar batas kendali umumnya banyak digunakan $\pm 3\sigma$.

Uji Normalitas

Uji normalitas digunakan untuk menentukan apakah data sampel yang telah dikumpulkan berdistribusi normal atau tidak. Untuk pengujian normalitas, salah satu uji statistik yang dapat digunakan adalah uji Kolmogorov-Smirnov dengan menggunakan nilai statistik uji *p-value*. Kriteria pengujiannya, jika *p-value* $> \alpha$ maka H_0 diterima, yang berarti data sampel berdistribusi normal.

Diagram Kendali *Cumulative-Sum* (CUSUM)

Misalkan sampel-sampel berukuran $n > 1$ dikumpulkan dan \bar{X}_i adalah rata-rata sampel ke- i yang diperoleh selama m periode, maka nilai μ_0 adalah target dari rata-rata proses. Nilai CUSUM didefinisikan sebagai berikut:

$$C_i = \sum_{j=1}^m (\bar{X}_i - \mu_0), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

dimana C_i adalah jumlah kumulatif sampel dengan sampel ke- i dengan \bar{X}_i didefinisikan oleh $\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}}{n}$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Selanjutnya nilai statistik C_i^+ dan C_i^- dari CUSUM didefinisikan sebagai berikut:

$$C_i^+ = \max[0, (\bar{X}_i - \mu_0) - K + C_{i-1}^+] \quad (2)$$

$$C_i^- = \max[0, -(\bar{X}_i - \mu_0) - K + C_{i-1}^-] \quad (3)$$

dimana $C_0^+ = C_0^- = 0$.

Dalam hal ini K merupakan nilai referensi dengan rumus $K = k\sigma = \frac{1}{2}\delta\sigma$, dimana δ adalah besarnya pergeseran rata-rata yang akan diteliti dan σ adalah simpangan baku proses. Kemudian hitung nilai kritis H dengan rumus $H = h\sigma$. Dalam prakteknya, nilai $k = 0,5$ dan $h = 5$ dipilih sehingga diagram kendali CUSUM berkinerja baik (Montgomery, 2009). Untuk kaidah keputusannya, jika salah satu dari

nilai C_i^+ atau C_i^- melebihi nilai kritis H maka proses dikatakan *out of control*.

Diagram Kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)

Misalnya $0 < \lambda < 1$ menunjukkan taraf pembobot dan μ_0 menunjukkan target proses. Kemudian sampel berukuran $n > 1$ dikumpulkan dan \bar{X}_i adalah rata-rata sampel ke- i yang diperoleh selama m periode. Nilai EWMA didefinisikan sebagai berikut:

$$Z_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

dimana Z_i adalah rata-rata bergerak eksponensial yang terboboti. Dalam prakteknya, $\lambda = 0,10$ menjadi rekomendasi dalam menetapkan nilai pembobot (Montgomery, 2009). Nilai awal (diperlukan dengan sampel pertama pada $i = 1$) adalah target proses, sehingga $Z_0 = \mu_0$.

Diagram kendali EWMA akan dibangun dengan memplot Z_i terhadap garis tengah (pusat) dan batas-batas kendali sebagai berikut:

$$BKB = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} (1 - (1 - \lambda)^{2i}) \quad (5)$$

$$Pusat = \mu_0 \quad (6)$$

$$BKA = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} (1 - (1 - \lambda)^{2i}) \quad (7)$$

dimana L adalah lebar batas kendali dan σ adalah simpangan baku proses. Lebar batas kendali biasanya berjarak 3σ . Dalam prakteknya, $L = 2,998$ menjadi rekomendasi dalam menetapkan lebar batas kendali EWMA saat $\lambda = 0,25$ (Montgomery, 2009).

Penaksir Parameter μ_0 dan σ

Jika nilai rata-rata (μ_0) dan simpangan baku (σ) dari suatu proses tidak diketahui, maka nilainya dapat ditaksir yaitu sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (8)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (9)$$

dimana $\bar{\bar{X}}$ adalah nilai rata-rata dari rata-rata sampel ke- i , \bar{R} adalah rentang yang didefinisikan oleh $\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m}$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dengan $R_i = x_{ij}$ terbesar - x_{ij} terkecil dan d_2 adalah nilai untuk mengestimasi sigma.

Diagram Kendali *Mixed EWMA-CUSUM*

Nilai $Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$ dari diagram kendali EWMA dikombinasikan dengan struktur diagram kendali CUSUM. *Mixed EWMA-CUSUM* didefinisikan oleh M_i^+ dan M_i^- dari diagram kendali CUSUM yang nilai awalnya ditetapkan sama dengan nol ($M_0^+ = M_0^- = 0$) dan nilainya bergantung pada Z_i dari diagram kendali EWMA.

$$M_i^+ = \max[0, (Z_i - \mu_0) - a_i + M_{i-1}^+] \quad (10)$$

$$M_i^- = \max[0, -(Z_i - \mu_0) - a_i + M_{i-1}^-] \quad (11)$$

dimana a_i adalah nilai referensi variasi waktu untuk struktur diagram *Mixed EWMA-CUSUM* yang didefinisikan oleh $a_i = a^* \sqrt{\text{var}(Z_i)}$ dimana $\text{var}Z_i = \sigma^2 \frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i})$ dengan a^* sama seperti k pada diagram kendali CUSUM.

Batas kendali untuk diagram *Mixed EWMA-CUSUM* didefinisikan sebagai berikut:

$$b_i = b^* \sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} (1 - (1 - \lambda)^{2i}) \quad (12)$$

dimana b^* adalah konstanta seperti h pada diagram kendali CUSUM.

Nilai dari M_i^+ dan M_i^- diplotkan terhadap batas kendali b_i . Untuk kaidah keputusannya, jika salah satu nilai dari M_i^+ dan M_i^- melebihi batas kendali b_i maka proses dikatakan *out of control*.

Headstart dan Fast Initial Responses (FIR)

Awalnya fitur *headstart* ini diperkenalkan oleh Lucas dan Crosier (1982) dengan menetapkan nilai awal menjadi 50% dari nilai pertama pada batas kendali diagram yang akan dimodifikasi.

Fast Initial Responses (FIR) pertama kali diperkenalkan oleh Steiner (1999). Fitur ini diperluas menggunakan *modified FIR adjustment* (MFIRadj) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$MFIRadj = \{1 - (1 - f)^{1+a(i-1)}\}^{1+\frac{1}{a}} \quad (13)$$

dimana f dan a adalah konstanta dengan rumus $a = \frac{1}{19} \left(\frac{-2}{\log_{10}(1-f)} - 1 \right)$. Dalam prakteknya, nilai $f = 0,5$ (50% *headstart* diagram kendali cusum) dan $a = 0,3$ dipilih sebagai rekomendasi dalam menetapkan nilai konstanta tersebut (Montgomery, 2009).

Diagram Kendali Mixed EWMA-CUSUM dengan Modified Fast Initial Response dan Headstart (MECFIRHS)

Batas kendali *mixed* EWMA-CUSUM dengan *MFIRadj* didefinisikan sebagai berikut:

$$b_i = b^* \sigma \{1 - (1 - f)^{1+a(i-1)}\}^{1+\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i})} \quad (14)$$

Kemudian menggunakan *headstart* dengan menetapkan nilai awal M_0^+ dan M_0^- menjadi 50% dari nilai pertama batas kendali b_i pada *MFIRadj* yaitu $M_0^+ = M_0^- = 0,5b_1$.

Nilai dari M_i^+ dan M_i^- diplotkan terhadap batas kendali b_i . Untuk kaidah keputusannya, jika salah satu nilai dari M_i^+ dan M_i^- melebihi batas kendali b_i maka proses dikatakan *out of control*.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Deskripsi Data

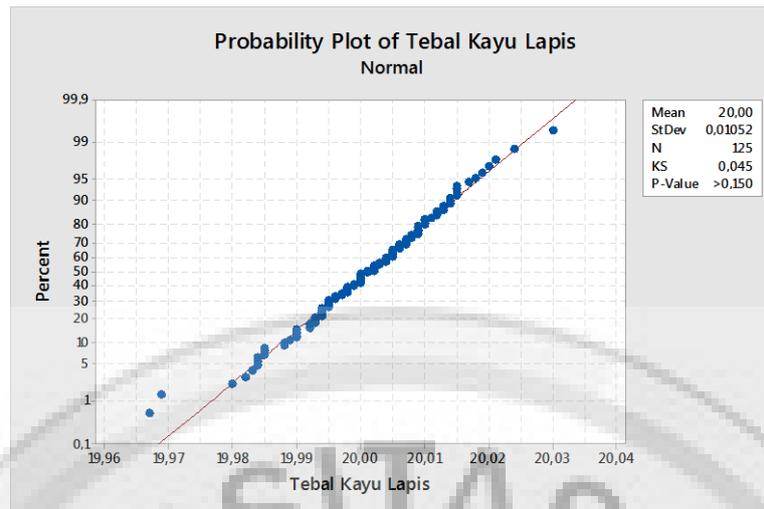
Data yang digunakan merupakan data sekunder hasil pengamatan tebal kayu lapis yang diproduksi PT. XYZ Jakarta. Pengamatan dilakukan dengan cara mengambil sampel selama 25 periode dan setiap periode diambil 5 buah sampel kayu lapis.

Uji Normalitas

Untuk melihat kenormalan data pengamatan tebal kayu lapis, maka dilakukan uji normalitas dengan menggunakan *software* Minitab 17.0. Uji normalitas digunakan untuk mengidentifikasi apakah data pengamatan tebal kayu lapis PT. XYZ Jakarta berdistribusi normal atau tidak. Uji normalitas dilakukan menggunakan statistik uji Kolmogorov-Smirnov dengan rumusan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Data sampel berdistribusi normal

H_1 : Data sampel tidak berdistribusi normal



Gambar 1 Uji Normalitas Tebal Kayu Lapis

Dari Gambar 1 (*output* Minitab 17.0) diatas, diperoleh nilai statistik uji Kolmogorov-Smirnov sebesar 0,045 dan *p-value* sebesar 0,150. Dengan menggunakan nilai $\alpha = 0.05$, maka diputuskan untuk menerima H_0 karena *p-value* $> \alpha$ sehingga dapat disimpulkan bahwa data pengamatan tebal kayu lapis berdistribusi normal.

Diagram Kendali Mixed EWMA-CUSUM dengan Modified Fast Initial Response dan Headstart (MECFIRHS)

Langkah pertama menghitung nilai rata-rata (μ_0) dan simpangan baku (σ) menggunakan penaksiran seperti pada Persamaan (8) dan Persamaan (9).

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m} = \frac{500,027}{25} = 20,0011$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0,024}{2,326} = 0,0103$$

Langkah kedua adalah menentukan taraf pembobot (λ). Dalam penelitian ini, nilai λ yang digunakan adalah $\lambda = 0,25$ (Montgomery 2009).

Langkah ketiga adalah menghitung nilai Z_i untuk $i = 1,2,3, \dots, 25$ menggunakan Persamaan (4). Nilai awal yang diberikan untuk Z_i sama dengan nilai target proses ($Z_0 = \mu_0$).

Langkah keempat adalah menghitung batas kendali b_i untuk $i = 1,2,3, \dots, 25$ menggunakan *modified fast initial response* (MFIRadj) seperti pada Persamaan (14) dengan menetapkan nilai $b^* = 22,52$, $f = 0,5$ dan $a = 0,3$.

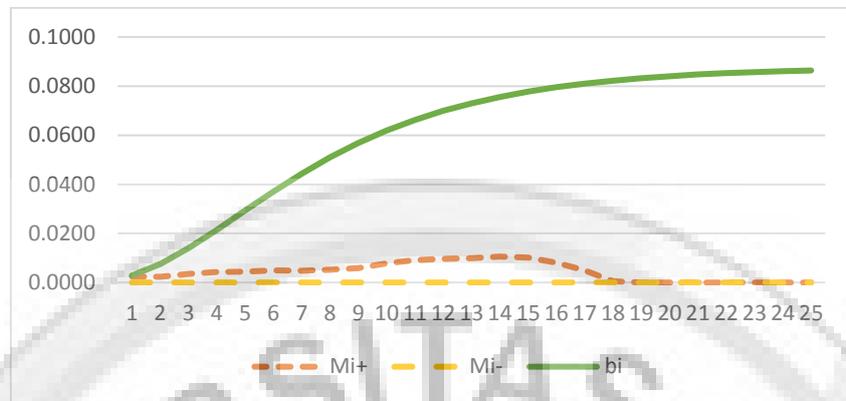
Langkah kelima adalah menghitung nilai a_i untuk $i = 1,2,3, \dots, 25$ yang didefinisikan oleh $a_i = a^* \sqrt{\text{var}(Z_i)}$ dimana $\text{var}(Z_i) = \sigma^2 \frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2i})$ dengan menetapkan nilai $a^* = 0,5$.

Langkah keenam adalah menentukan nilai awal M_o^+ dan M_o^- menggunakan *headstart*, sehingga didapat nilai awalnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_o^+ &= M_o^- = 0,5b_1 \\ &= 0,5(0,00288) \\ &= 0,0014 \end{aligned}$$

Langkah ketujuh adalah menghitung nilai M_i^+ dan M_i^- untuk $i = 1,2,3, \dots, 25$ menggunakan Persamaan (10) dan Persamaan (11).

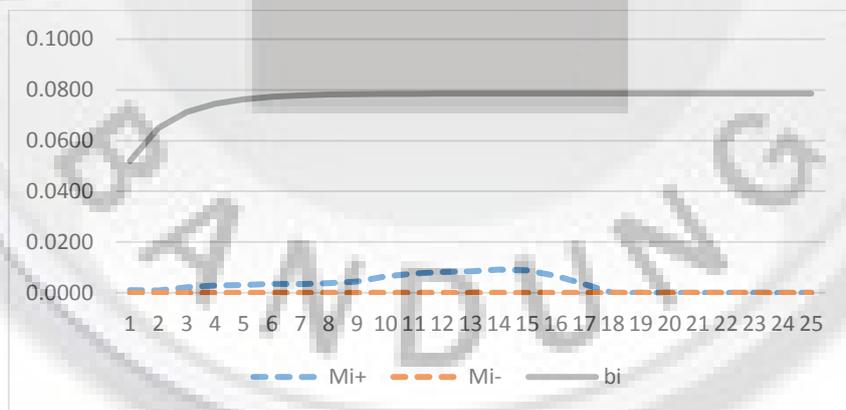
Langkah terakhir adalah memplotkan nilai M_i^+ dan M_i^- tersebut terhadap batas kendali b_i , sehingga didapat diagram kendali *mixed EWMA-CUSUM* dengan *modified fast initial response* dan *headstart* (MECFIRHS) sebagai berikut:



Gambar 2 Diagram Kendali MECFIRHS

Dari Gambar 2 di atas, terlihat semua titik plot M_i^+ dan M_i^- berada dibawah batas kendali b_i . Karena tidak ada titik plot yang keluar batas kendali maka dapat disimpulkan proses produksi kayu lapis PT. XYZ Jakarta berada dalam proses yang terkendali (*in control*).

Menurut Jimoh dkk (2015), diagram kendali *mixed EWMA-CUSUM* dapat meningkat kepekaannya dalam mendeteksi kejadian *out of control* jika menggunakan tambahan fitur *modified fast initial response* dan *headstart*. Oleh karena itu, untuk melihat tingkat kepekaannya akan dilakukan perbandingan dengan diagram kendali *mixed EWMA-CUSUM* tanpa tambahan fitur dengan menggunakan data yang sama sehingga didapat diagram kendali *mixed EWMA-CUSUM* (MEC) sebagai berikut:



Gambar 3 Diagram Kendali MEC

Dari Gambar 3 diatas, terlihat lebar batas kendali dari diagram *mixed EWMA-CUSUM* lebih lebar dibandingkan dengan lebar batas kendali dari diagram *mixed EWMA-CUSUM* dengan tambahan fitur pada Gambar 2, sehingga dapat disimpulkan bahwa diagram kendali *mixed EWMA-CUSUM* dengan tambahan fitur *modified fast initial response* dan *headstart* lebih sensitif dalam mendeteksi kejadian *out of control* dibandingkan dengan diagram kendali *mixed EWMA-CUSUM* tanpa tambahan fitur.

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, didapat kesimpulan bahwa penerapan diagram kendali *mixed* EWMA-CUSUM dengan *modified fast initial response* dan *headstart* (MECFIRHS) pada pengendalian kualitas produk dilakukan dengan cara menghitung nilai Z_i terlebih dahulu. Kemudian menentukan batas kendali b_i menggunakan *modified fast initial response* dan menghitung nilai M_i^+ dan M_i^- dengan menentukan nilai awal menggunakan *headstart*. Selanjutnya memplotkan nilai M_i^+ dan M_i^- terhadap batas kendali dengan kaidah keputusannya jika salah satu nilai dari M_i^+ dan M_i^- melebihi batas kendali b_i maka proses dikatakan *out of control*. Untuk penerapannya pada data pengamatan tebal kayu lapis yang diproduksi PT. XYZ Jakarta menunjukkan bahwa proses produksi berada dalam proses yang terkendali (*in control*).

E. Saran

Keterbatasan data yang diperoleh penulis ternyata hasil penerapan diagram kendali *mixed* EWMA-CUSUM dengan *modified fast initial response* dan *headstart* (MECFIRHS) menunjukkan proses produksi dalam keadaan terkendali. Oleh karena itu, disarankan untuk penelitian selanjutnya menggunakan data pengamatan yang lebih banyak dengan karakteristik produksi yang membutuhkan ketelitian lebih tinggi agar terlihat kepekaannya dalam mendeteksi kejadian *out of control*.

Daftar Pustaka

- Ajadi, J. O., Muhammad Riaz, dan Khalid Al-Ghamdi. (2015). On Increasing The Sensitivity Of Mixed EWMA-CUSUM Control Charts For Location Parameter. *Journal of Applied Statistics*. DOI: 10.1080/02664763.1094453.
- Haq. A., Jennifer Brown, dan Elena Moltchanova. (2014). Improved Fast Initial Response Features for Exponentially Weighted Moving Average and Cumulativ Sum Control Charts. *Qual. Reliab. Eng. Int.* 30 (5), pp. 697-710.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statisstical Quality Control 6th Edition*. New York: Wiley.
- Montgomery, D. C. (2011). *Applied Statictics and Probability for Engineers Fifth Edition*. New York: Wiley.
- Muchlis, R. D. (2010). *Pengendalian Kualitas Statistika*. Bandung: Pustaka Ceria.
- Siegel, Sidney. (1997). *Statistika Non-Parametrik untuk Ilmu-ilmu Sosial*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Steiner. S. H. (1999). EWMA Control Charts with Time Varying Control Limits and Fast Initial Response. *J. Qual. Technol.* 31 (1), pp. 75-86.
- Sudjana. (2002). *Metode Statistika*. Bandung. Tarsito.