Penerapan Model Frailty Weibull-Eksponensial pada Data Tabel Mortalitas Indonesia Tahun 1999

[1]Anjalina Kusumawardhani, [2]Aceng Komarudin Mutaqin, [3]Lisnur Wachidah
[1,2,3]*Prodi Statistika, FakultasMatematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116*
email: [1]kusumaanjal@gmail.com

Abstract. The mortality table usually assumes that the population studied is homogeneous meaning that all members of the population have the same risk of death. In fact each individual has an unobservable risk factor and is difficult to monitor or measure. This factor is known as frailty. Next comes the term frailty model, which is an individual survival model involving unobserved risk factors (frailty). Shanubhogue and Sinojiya in 2017 introduced the Weibull-exponential frailty model. The parameter estimator of the frailty model uses EM Algorithm. While the model fit test using likelihood ratio test. In this paper the Weibull-exponential frailty model was applied for the 1999 Indonesian Mortality Table. The results of the tests show that the age-sex model of male or female population is not affected by frailty (unobservable risk factors).

Keywords : Weibull distribution, exponential distribution, frailty model, Indonesian Mortality Table 1999, EM algorithm, likelihood ratio test.

Abstrak. Tabel mortalitas biasanya mengasumsikan bahwa populasi yang diteliti bersifat homogen artinya semua anggota populasi memiliki risiko kematian yang sama. Pada kenyataannya setiap individu memiliki faktor risiko yang tidak teramati dan sulit untuk dipantau atau diukur. Faktor tersebut dikenal dengan frailty. Selanjutnya muncul istilah model frailty, yaitu model daya tahan hidup individu yang melibatkan faktor risiko yang tidak teramati (frailty). Shanubhogue dan Sinojiya tahun 2017 memperkenalkan model frailty Weibull-eksponensial 2-parameter. Penaksir parameter dari model frailty tersebut menggunakan Algoritme Expectation-Maximization. Sedangkan pengujian kecocokan modelnya menggunakan uji rasio likelihood. Dalam skripsi ini model frailty Weibull-eksponensial diaplikasikan untuk data Tabel Mortalitas Indonesia tahun 1999. Hasil dari pengujian menunjukkan bahwa model usia penduduk jenis kelamin laki-laki atau pun perempuan tidak dipengaruhi oleh frailty (faktor risiko yang tidak teramati).

Kata Kunci : Distribusi Weibull, distribusi eksponensial, model *frailty*, Tabel Mortalitas Indonesia tahin 1999, algoritme EM, uji rasio *likelihood*.

A. Pendahuluan

Vaupel dkk. (1979) memperkenalkan konsep *frailty* sebagai faktor risiko yang tidak teramati meliputi kerentanan seseorang dalam mengalami risiko kematian. Asumsi utama dalam Vaupel dkk. (1979) adalah terdapat suatu nilai unik yang dimiliki setiap individu, dimana nilai tersebut sangat berpengaruh terhadap risiko kematian seseorang. Model *frailty* digunakan dalam asuransi jiwa untuk mewakili heterogenitas pada populasi karena faktor risiko yang tidak dapat diamati. Untuk setiap produk asuransi jiwa, besar kecilnya premi yang akan dikenakan kepada pihak nasabah ditetapkan berdasarkan data Tabel Mortalitas Indonesia. Mengabaikan faktor risiko yang tidak dapat diamati dapat menyebabkan penyimpangan (bias) penilaian produk asuransi dan juga dapat menyebabkan kerugian kepada perusahaan asuransi karena harga premi tidak sesuai dengan risiko yang dipertanggungkan. Oleh karena itu penting sekali melibatkan faktor risiko yang tidak dapat diamati dalam memodelkan usia seseorang.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka perumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut: "bagaimana menerapkan model frailty Weibull-eksponensial pada data Tabel Mortalitas Indonesia?". Selanjutnya, tujuan dalam penelitian ini adalah untuk menerapkan model *frailty* Weibull-eksponensial pada data Tabel Mortalitas Indonesia.

B. Landasan Teori

Metode Penaksir Kemungkinan Maksimum

PKM merupakan salah satu metode penaksiran yang banyak sekali digunakan untuk menaksir nilai-nilai parameter yang dimiliki suatu model atau distribusi. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak dari suatu distribusi yang mempunyai fungsi densitas $f(x;\theta)$; $\theta \in \Omega$, maka fungsi densitas bersama dari sampel acak tersebut adalah

$$L(\theta) = L(\theta;\, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f(x;\theta);\ \theta \in \Omega$$

Fungsi densitas bersama di atas, disebut sebagai fungsi kemungkinan (*likelihood function*). Prinsip utama dalam metode PKM adalah memilih nilai θ sedemikian sehingga $L(\theta)$ menjadi maksimum. Dengan perkataan lain, jika $\hat{\theta} = u_1\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ maka kita mencari $\hat{\theta}$ sedemikian rupa, sehingga jika $\hat{\theta}$ disubtitusikan untuk θ pada $L(\theta)$ maka $L(\hat{\theta})$ maksimum, atau

$$L(\hat{\theta}) \geq L(\theta).$$

Nilai $\hat{\theta}$ yang memenuhi persamaan di atas disebut penaksir kemungkinan maksimum bagi parameter θ (Sunendiari,2012).

Algoritme EM

Secara garis besar, algoritme EM adalah algoritme untuk menduga suatu parameter dalam suatu fungsi dengan menggunakan MLE, dimana fungsi tersebut mengandung data yang tidak lengkap (Hogg dkk, 2013). Algoritme EM merupakan proses yang terbagi atas dua langkah yaitu:

1. *Expectation step* (Tahap E)
   Pencarian nilai ekspektasi untuk fungsi *likelihood* berdasarkan peubah acak yang dapat diamati. Secara umum, pada tahap ini ekspektasi berisikan perhitungan:
   $$Q\left(\theta, \hat{\theta}^{(m)}\right) = E_Z\{\ln[f(z,x;\theta)] | x, \hat{\theta}^{(m)}\}$$
   dimana $\hat{\theta}^{(m)}$ menyatakan penaksir dari parameter θ pada iterasi ke-m dan $f(z,x;\,\theta)$ menyatakan fungsi densitas gabungan dari Z (peubah acak yang tidak dapat diamati) dan X (peubah acak yang dapat diamati).
2. *Maximization step* (Tahap M)
   Langkah M-step yaitu pencarian MLE dari parameter-parameter dengan memaksimumkan ekspektasi likelihood yang dihasilkan dari E-step, yaitu fungsi Q dimaksimumkan berkenaan dengan θ untuk memperoleh $\hat{\theta}^{(m+1)}$. Parameter-parameter yang dihasilkan dari M-step akan digunakan kembali pada E-step yang berikutnya, dan langkah ini akan diulang terus sampai memberikan nilai taksiran parameter yang konvergen, yaitu hingga diperoleh nilai jarak $\left\|\hat{\theta}^{(m)} - \hat{\theta}^{(m-1)}\right\|$ yang cukup kecil.

Model *Frailty* Weibull-Eksponensial

Untuk mengatasi masalah heterogenitas dalam populasi yang dihasilkan dari kovariat yang tidak teramati, Vaupel,dkk.(1995) menyarankan untuk menggunakan model efek acak. Mereka memperkenalkan model *frailty* dan menerapkannya untuk data populasi. Model *frailty* klasik mengasumsikan model hazard proporsional bersyarat pada efek acak (*frailty*), yaitu hazard dari suatu individu tergantung pada variabel yang tidak teramati, Z, yang bekerja secara multiplikatif pada fungsi hazard baseline λ_0,

$$\lambda(t|z) = z\lambda_0(t).$$

Dalam model *frailty* klasik, distribusi bersyarat dari T bagi seorang individu dengan *frailty* z adalah

$$f(t|z) = z\lambda_0(t)e^{-z\int_0^t \lambda_0(u)du}.$$

Fungsi hazard baseline $\lambda_0(t)$ berdasarkan distribusi Weibull diperoleh sebagai berikut:

$$\lambda_0(t) = \frac{f_0(t;p,\theta)}{S_0(t)} = p\theta^{-p}t^{p-1}$$

dengan demikian, distribusi bersyarat dari T bagi seorang individu dengan *frailty* z adalah

$$f(t|z) = z^\rho p\theta^{-p}t^{p-1}e^{-z^\rho\left(\frac{t}{\theta}\right)^p}; t > 0, \theta > 0, \rho < p. \quad (1)$$

Misalkan *frailty* berdistribusi eksponensial dengan mean η, sebagai berikut

$$f(z;\eta,\mu) = \frac{1}{\eta}e^{-\frac{z}{\eta}}; z > 0. \quad (2)$$

Kemudian distribusi gabungan dari T dan Z adalah

$$f(t|z) = z^\rho p\theta^{-p}t^{p-1}e^{-z^\rho\left(\frac{t}{\theta}\right)^p}; t > 0, \theta > 0, \rho < p. \quad (3)$$

Oleh karena itu, distribusi marginal dari T adalah

$$f(t) = \int_\mu^\infty f(t,z)dz = \frac{p\theta^{-p}t^{p-1}}{\eta}\int_\mu^\infty z^\rho\, e^{-\left\{z^\rho\left(\frac{t}{\theta}\right)^p + \frac{z-\mu}{\eta}\right\}}dz, \quad (4)$$

Penaksir Kemungkinan Maksimum Model *Frailty* Weibull-Eksponensial

Penaksiran parameter model *frailty* Weibull-eksponensial menggunakan metode penaksiran kemungkinan maksimum. Fungsi *likelihood* untuk model *frailty* Weibull-eksponensial adalah

$$L(\theta,p,\eta,\rho) = \prod_{i=1}^n f(t_i,z_i) = \prod_{i=}^n \frac{z^\rho p\theta^{-p}t^{p-1}e^{-\left\{z^\rho\left(\frac{t}{\theta}\right)^p + \frac{z-(1-\eta)}{\eta}\right\}}}{\eta} \quad (5)$$

Fungsi *log-likelihood* dari model tersebut adalah

$$l = (p-1)\sum_{i=1}^n \ln(t_i) - np\ln\theta + n\ln p + \rho\sum_{i=1}^n \ln(z_i) - \frac{1}{\theta^p}\sum_{i=1}^n t_i^p z_i^\rho - \frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^n (z_i - 1 + \eta) - n\ln\eta \quad (6)$$

Untuk memulainya, anggap bahwa ρ diketahui dan persamaan kemungkinan maksimumnya adalah

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{p}{\theta^{p+1}}\sum_{i=1}^n t_i^p z_i^\rho - \frac{np}{\theta} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n}{p} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n z_i^\rho \ln\left(\frac{t_i}{\theta}\right)\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^p = 0 \quad (8)$$

Kemudian solusi dari persamaan kemungkinan untuk θ adalah

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{i=1}^n t_i{}^p z_i^\rho\right)^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

Penaksir kemungkinan maksimum untuk η adalah

$$\hat{\eta} = \max_{1\le i\le n}(1 - z_i). \quad (10)$$

Karena persamaan kemungkinan maksimum untuk p yang ada pada Persamaan (8) secara analitik tidak dapat dipecahkan, maka dapat digunakan metode Newton-

Raphson. Dalam metode Newton-Raphson dibutuhkan turunan kedua dari fungsi yang ada pada Persamaan (6). Turunan kedua dari fungsi pada Persamaan (6) terhadap parameter p adalah

$$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{n}{p^2} - \sum_{i=1}^{n} z_i^{\rho} \left[\ln\left(\frac{t_i}{\theta}\right)\right]^2 \left(\frac{t_i}{\theta}\right)^p = 0 \quad (11)$$

Persamaan iterasi untuk taksiran parameter p menggunakan metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut:

$$\hat{p}^k = \hat{p}^{(k-1)} - \frac{\left.\frac{dl}{dp}\right|_{p=\hat{p}^{(k-1)}}}{\left.\frac{d^2 l}{dp^2}\right|_{p=\hat{p}^{(k-1)}}} ; k = 1,2,\cdots \quad (12)$$

Proses iterasi dihentikan ketika nilai $\left|\hat{p}^k - \hat{p}^{(k+1)}\right| < \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan yang sangat kecil, misal $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$.

Untuk nilai tertentu dari ρ, p, θ dan η, tahap E dalam algoritme EM adalah menghitung nilai

$$E(Z|t) = \int_{\mu}^{\infty} zf(z|t)dz = \frac{\int_{\mu}^{\infty} z^{\rho+1} e^{-\left\{z^{\rho}\left(\frac{t}{\theta}\right)^p + \frac{z-\mu}{\eta}\right\}} dz}{\int_{\mu}^{\infty} x^{\rho} e^{-\left\{x^{\rho}\left(\frac{t}{\theta}\right)^p + \frac{x-\mu}{\eta}\right\}} dx}, \quad (13)$$

$$E(Z^{\rho}|t) = \int_{\mu}^{\infty} zf(z|t)dz = \frac{\int_{\mu}^{\infty} z^{2\rho} e^{-\left\{z^{\rho}\left(\frac{t}{\theta}\right)^p + \frac{z-\mu}{\eta}\right\}} dz}{\int_{\mu}^{\infty} x^{\rho} e^{-\left\{x^{\rho}\left(\frac{t}{\theta}\right)^p + \frac{x-\mu}{\eta}\right\}} dx}, \quad (14)$$

$$E(ln\, Z|t) = \int_{\mu}^{\infty} \ln zf(z|t)dz = \frac{\int_{\mu}^{\infty} \ln z z^{\rho} e^{-\left\{z^{\rho}\left(\frac{t}{\theta}\right)^p + \frac{z-\mu}{\eta}\right\}} dz}{\int_{\mu}^{\infty} x^{\rho} e^{-\left\{x^{\rho}\left(\frac{t}{\theta}\right)^p + \frac{x-\mu}{\eta}\right\}} dx}. \quad (15)$$

Untuk nilai yang berbeda dari ρ di kisaran ρ, diperoleh taksiran parameter p, θ dan η menggunakan algoritma EM. Prosedur berakhir ketika nilai fungsi kemungkinannya maksimum.

Uji Kecocokan Model *Frailty*

Pengujian kecocokan dari model *frailty* yaitu menggunakan uji rasio *likelihood*. Hipotesis untuk uji kecocoka model *frailty* $H_0 : \rho = 0$, model tanpa *frailty* vs $H_1 : \rho \neq 0$, model dengan *frailty*. Statis uji untuk hipotesis diatas adalah

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\theta},\hat{p})}{L(\tilde{\theta},\tilde{p},\tilde{\eta},\tilde{\rho})} \quad (16)$$

Dimana $L(\hat{\theta},\hat{p})$ adalah fungsi *likelihood* di bawah model tanpa *frailty* dan $L(\tilde{\theta},\tilde{p},\tilde{\eta},\tilde{\rho})$ adalah fungsi *likelihood* di bawah model dengan *frailty*. Kriteria uji untuk uji kecocokan model *frailty* adalah tolak H_0 jika $-2(\log(\Lambda)) > \chi_1^2(1-\alpha)$, dimana $\chi_1^2(1-\alpha)$ adalah nilai persentil teratas ke-$(100 \times (1-\alpha))$ dari distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas satu, dan α adalah taraf nyata.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Hasil Penaksiran Parameter Model *Frailty* Weibull-Eksponensial

Tabel Mortalitas Indonesia Tahun 1999 Jenis Kelamin Laki-laki

Dalam subbab ini akan dilakukan penaksiran parameter model *frailty* Weibull-eksponensial menggunakan algoritme EM untuk data Tabel Mortalitas Indonesia tahun 1999 untuk jenis kelamin laki-laki. Nilai parameter ρ ditetapkan yaitu $0,1; 0,2; 0,3; \cdots; 1,0$. Nilai awal parameter p dan θ dari distribusi Weibull dihitung dengan bantuan perangkat lunak Matlab 2015b, sedangkan nilai awal untuk taksiran parameter η yaitu 1. Nilai awal taksiran parameter p dan θ yang diperoleh dengan bantuan perangkat lunak Matlab 2015b yaitu $p = 5,5196$ dan $\theta = 77,0875$.

Nilai awal taksiran parameter tersebut selanjutnya akan digunakan untuk menghitung nilai taksiran parameter model *frailty* Weibull-eksponensial melalui algoritme EM menggunakan perangkat lunak Matlab R2015b (Lampiran 1). Setelah nilai awal didapatkan, dengan menggunakan nilai parameter $\rho = 0,1$ selanjutnya maduk Tahap-E dalam algoritme EM yaitu menghitung nilai ekspektasi yang ada pada Persamaan (2.13), Persamaan (2.14), dan Persamaan (2.15). Dengan menggunakan nilai parameter $\rho = 0,1$ dan nilai awal taksiran parameter $\hat{\eta} = 1, \hat{p} = 5,5196$, dan $\hat{\theta} = 77,0875$ diperoleh nilai $E(Z|t), E(Z^{\rho}|t)$, dan $E(ln\, Z|t)$ yang disajikan dalam Tabel 1. Nilai tersebut dihitung dengan menggunakan bantuan perangkat lunak Matlab 2015b.

Tabel 1. Nilai $E(Z|t), E(Z^{\rho}|t)$, dan $E(ln\, Z|t)$ untuk $\rho = 0,1$

t	Frekuensi	$E(Z\|t)$	$E(Z^{\rho}\|t)$	$E(ln\, Z\|t)$
0,5	321	1,1	0,9651	-0,4238
1	82	1,1	0,9651	-0,4238
2	75	1,1	0,9651	-0,4238
3	75	1,1	0,9651	-0,4238
4	73	1,1	0,9651	-0,4238
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
96	329	0,7911	0,9201	-0,9303
97	222	0,7740	0,9171	-0,9652
98	141	0,7562	0,9139	-1,0024
99	86	0,7378	0,9105	-1,0421
100	98	0,7186	0,9069	-1,0846

Langkah selanjutnya adalah melakukan Tahap-M dalam algoritme EM yaitu menghitung nilai taksiran parameter θ dan η pada iterasi pertama menggunakan Persamaan (9) dan Persamaan (10). sedangkan untuk parameter p, nilai taksirannya dihitung menggunakan metode iterasi Newton-Raphson melalui Persamaan (12). Nilai taksiran parameter θ pada iterasi pertama adalah

$$\hat{\theta} = \big((0,5^{5,5196} \times 0,9651 \times 321) + (1^{5,5196} \times 0,9651 \times 82) + (2^{5,5196} \times 0,9651 \times 75) + \cdots + (100^{5,5196} \times 0.9069 \times 98)\big)^{\frac{1}{5,5196}} = 76,3011.$$

Nilai taksiran parameter η pada iterasi pertama adalah

$$\hat{\eta} = \frac{100.550,3}{100000} = 1,0055$$

Dengan bantuan perangkat lunak Matlab 2015b, nilai taksiran parameter p pada iterasi pertama adalah $\hat{p} = 5,5433$.

Setelah mengitung nilai taksiran parameter, langkah selanjutnya yaitu menghitung jarak antara nilai taksiran parameter $\hat{p}$, $\hat{\theta}$ dan $\hat{\eta}$ pada iterasi pertama dengan nilai awalnya yaitu

$\left\{\left(\hat{\theta}^{(1)}-\hat{\theta}^{(0)}\right)^2+\left(\hat{\eta}^{(1)}-\hat{\eta}^{(0)}\right)^2+\left(\hat{p}^{(1)}-\hat{p}^{(0)}\right)^2\right\}^{1/2}=\{(76{,}3011-77{,}0875)^2+(1{,}0055-1)^2+(5{,}5432-5{,}5196)^2\}^{\frac{1}{2}}=0{,}7868.$

Nilai jarak pada iterasi pertama di atas lebih besar dari $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$, sehingga proses dilanjutkan untuk iterasi 2, 3 dan seterusnya sampai diperoleh nilai jarak yang lebih kecil dari 1×10^{-5}. Dengan menggunakan perangkat lunak Matlab 2015b, diperoleh nilai taksiran parameter p, θ dan η dengan menggunakan algoritme EM untuk berbagai iterasi. Hasilnya disajikan dalam Tabel 2.

Tabel 2. Hasil Taksiran Parameter θ, p, dan η untuk $\rho = 0{,}1$

	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\eta}$	**jarak**
Nilai Awal	77,0875	5,5196	1	
Iterasi 1	76,3011	5,5433	1,0055	0,7868
Iterasi 2	76,3097	5,5470	1,0054	0,0094
Iterasi 3	76,3129	5,5473	1,0054	0,0032
Iterasi 4	76,3132	5,5473	1,0054	0,0003
Iterasi 5	76,3132	5,5473	1,0054	$2{,}15\times 10^{-5}$
Iterasi 6	76,3132	5,5473	1,0054	$1{,}27\times 10^{-6}$

Dalam Tabel 2. terlihat bahwa proses iterasi berhenti pada iterasi ke-6 karena nilai jaraknya $1{,}27 \times 10^{-6}$ sudah lebih kecil dari1×10^{-5}. Dengan demikian untuk $\rho = 0{,}1$, nilai taksiran parameter θ, p, dan η menggunakan algoritme EM masing-masing adalah $\hat{\theta} = 76{,}3132$, $\hat{p} = 5{,}5473$ dan $\hat{\eta} = 1{,}0054$. Dengan nilai taksiran parameter tersebut, maka nilai fungsi log-*likelihood*-nya dapat dihitung menggunakan Persamaan (6), yaitu

$$l = [(5{,}5473-1)(\ln 0{,}5+\ln 0{,}5+\cdots+\ln 100)] - [100.000 \times 5{,}5473 \times \ln 76{,}3132] + [100.000 \ln 5{,}5473] + [0{,}1 \times -56304{,}0434] - \left[\frac{1}{76{,}3132^{5{,}5473}} \times ((0{,}5^{5{,}5473} \times 0{,}9651) + (0{,}5^{5{,}5473} \times 0{,}9651) + \cdots + (100^{5{,}5473} \times 0{,}9069))\right] - \left[\frac{1}{1{,}0054} \times 100.550{,}2679\right] - [100.000 \ln 1{,}0054] = -522.141{,}7174.$$

Dengan jalan yang sama seperti langkah-langkah di atas dapat dihitung nilai taksiran parameter θ, p, dan η menggunakan algoritme EM untuk $\rho = 0{,}2; 0{,}3; \ldots; 1{,}0$. Hasilnya disajikan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Taksiran Parameter p, θ dan $\boldsymbol{\eta}$ untuk Berbagai Nilai ρ Beserta Nilai Fungsi Log-likelihood untuk Data TMI 1999 Jenis Kelamin Laki-laki

$\hat{\rho}$	$\hat{p}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\eta}$	Nilai Fungsi Log-*likelihood*
0,1	5,5473	76,3132	1,0054	-522.141,7174
0,2	5,6199	75,6661	1,0195	-524.771,9241
0,3	5,7232	75,1822	1,0387	-528.307,5729
0,4	5,8477	74,8484	1,0604	-532.128,2208
0,5	5,9870	74,6351	1,0828	-535.849,1788
0,6	6,1370	74,5127	1,1051	-539.274,293
0,7	6,2945	74,4566	1,1267	-542.323,1184
0,8	6,4572	74,4481	1,1473	-544.976,4179
0,9	6,6231	74,4730	1,1669	-547.244,7357
1,0	6,7909	74,5211	1,1854	-549.151,7938

Berdasarkan Tabel 3, terlihat bahwa pasangan taksiran parameter yang nilai fungsi log-*likelihood*-nya maksimum adalah $\hat{\rho} = 0{,}1$, $\hat{\theta} = 76{,}3132$, $\hat{p} = 5{,}5473$ dan $\hat{\eta} = 1{,}0054$. Jadi taksiran parameter model *frailty* Weibull-eksponensial untuk data Tabel Mortalitas Indonesia tahun 1999 untuk jenis kelamin laki-laki adalah $\hat{\rho} = 0{,}1$, $\hat{\theta} = 76{,}3132$, $\hat{p} = 5{,}5473$ dan $\hat{\eta} = 1{,}0054$.

Tabel Mortalitas Indonesia Tahun 1999 Jenis Kelamin Perempuan

Dalam subbab ini akan dilakukan penaksiran parameter model *frailty* Weibull-eksponensial menggunakan algoritme EM untuk data Tabel Mortalitas Indonesia tahun 1999 untuk jenis kelamin perempuan. Dengan jalan yang sama sebagaimana untuk kasus data Tabel Mortalitas Indonesia tahun 1999 untuk jenis kelamin laki-laki, diperoleh hasil penaksiran parameter model *frailty* Weibull-eksponensial menggunakan algoritme EM untuk data Tabel Mortalitas Indonesia tahun 1999 untuk jenis kelamin perempuan. Hasilnya disajikan dalam Tabel 4.

Tabel 4. Taksiran Parameter p, θ dan η untuk Berbagai Nilai ρ Beserta Nilai Fungsi Log-*likelihood* untuk Data TMI 1999 Jenis Kelamin Perempuan

$\hat{\rho}$	$\hat{p}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\eta}$	Nilai Fungsi Log-*likelihood*
0,1	6,0952	80,7452	1,0054	-519.078,2512
0,2	6,1773	80,1167	1,0196	-521.670,5385
0,3	6,2941	79,6438	1,0390	-525.164,9261
0,4	6,4347	79,3151	1,0609	-528.950,4850
0,5	6,5922	79,1030	1,0837	-532.646,4883
0,6	6,7617	78,9795	1,1064	-536.057,5944
0,7	6,9395	78,9211	1,1285	-539.101,9271
0,8	7,1232	78,9097	1,1497	-541.758,1436
0,9	7,3106	78,9318	1,1699	-544.034,2372
1,0	7,5003	78,9772	1,1889	-545.865,9780

Berdasarkan Tabel 4., terlihat bahwa pasangan taksiran parameter yang nilai fungsi log-*likelihood*-nya maksimum adalah $\hat{\rho} = 0{,}1$, $\hat{\theta} = 80{,}7452$, $\hat{p} = 6{,}0952$ dan $\hat{\eta} = 1{,}0054$. Jadi taksiran parameter model *frailty* Weibull-eksponensial untuk data Tabel Mortalitas Indonesia tahun 1999 untuk jenis kelamin perempuan adalah $\hat{\rho} = 0{,}1$, $\hat{\theta} = 80{,}7452$, $\hat{p} = 6{,}0952$ *dan* $\hat{\eta} = 1{,}0054$.

Pengujian Model *Frailty*

1. **Tabel Mortalitas Indonesia Tahun 1999 Jenis Kelamin Laki-laki**

Pengujian kecocokan dari model *frailty* dilakukan dengan menggunakan uji rasio likelihood. Hipotesis untuk uji kecocokan model *frailty* adalah

H_0 : $\rho = 0$, model usia penduduk laki-laki di Indonesia tidak dipengaruhi oleh *frailty*,

H_1 : $\rho \neq 0$, model usia penduduk laki-laki di Indonesia dipengaruhi oleh *frailty*.

Statistik uji untuk hipotesis di atas dihitung menggunakan Persamaan (2.16) Langkah pertama untuk menghitung statistik uji tersebut adalah menaksir parameter model tanpa *frailty* yaitu parameter p dan θ yang merupakan parameter dari distribusi Weibull. Dengan bantuan perangkat lunak Matlab 2015b, nilai taksiran parameter tersebut adalah $\hat{\theta} = 77{,}0875$ dan $\hat{p} = 5{,}5196$. selanjutnya adalah menghitung nilai fungsi log-*likelihood* di bawah model tanpa *frailty* sebagai berikut

$$l = [100.000 \ln 5{,}5196] - [100.000 \times 5{,}5196 \times \ln 77{,}0875] + [(5{,}5196 - 1) \times \ln 0{,}5 + \ln 0{,}5 + \cdots + \ln 100] - \left[\frac{1}{77{,}0875} \times (0{,}5^{5{,}5196} + 0{,}5^{5{,}5196} + \cdots + 100^{5{,}5196} - 100.000 \ln 77{,}0875\right] = -421.145{,}7785.$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai fungsi log-*likelihood* di bawah model *frailty*. Nilai tersebut sudah diperoleh dalam Subbab 4.2.1 yaitu $l = -522.141{,}7174$. Dengan demikian nilai statistik ujinya adalah

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\theta}, \hat{p})}{L(\tilde{\theta}, \tilde{p}, \tilde{\eta}, \tilde{\rho})} = \frac{-421.145{,}7785}{-522.141{,}7174} = 0{,}8066,$$

atau $-2(\log(\Lambda)) = 0{,}4299$. Dengan taraf nyata $\alpha = 5\%$, diperoleh nilai persentil ke-$100 \times (1 - 0{,}05) = 95$ dari distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas satu, $\chi_1^2(0{,}95) = 3{,}841$. Karena nilai $-2(\log(\Lambda)) = 0{,}4299 < \chi_1^2(0{,}95) = 3{,}841$, maka hipotesis nol diterima dan disimpulkan bahwa model usia penduduk laki-laki di Indonesia tidak dipengaruhi oleh *frailty* (faktor risiko yang tidak teramati). Dengan demikian model untuk usia untuk penduduk laki-laki di Indonesia yang tidak dipengaruhi oleh *frailty*-nya adalah

$$f(t) = \hat{p}\hat{\theta}^{-\hat{p}} t^{\hat{p}-1} e^{-\left(\frac{t}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{p}}} = 5{,}5196 \times 77{,}0875^{-5{,}5196} t^{5{,}5196-1} e^{-\left(\frac{t}{77{,}0875}\right)^{5{,}5196}} \quad ; t > 0.$$

2. Tabel Mortalitas Indonesia Tahun 1999 Jenis Kelamin Perempuan

Pengujian kecocokan dari model *frailty* dilakukan dengan menggunakan uji rasio likelihood. Hipotesis untuk uji kecocokan model *frailty* adalah

$H_0 : \rho = 0$, model usia penduduk laki-laki di Indonesia tidak dipengaruhi oleh *frailty*,

$H_1 : \rho \neq 0$, model usia penduduk laki-laki di Indonesia dipengaruhi oleh *frailty*.

Statistik uji untuk hipotesis di atas dihitung menggunakan Persamaan (16). Langkah pertama untuk menghitung statistik uji tersebut adalah menaksir parameter model tanpa frailty yaitu parameter p dan θ yang merupakan parameter dari distribusi Weibull. Dengan bantuan perangkat lunak Matlab 2015b, nilai taksiran parameter tersebut adalah $\hat{\theta} = 81{,}4925$dan $\hat{p} = 6{,}0639$. selanjutnya adalah menghitung nilai fungsi log-likelihood di bawah model tanpa frailty sebagai berikut

$$l = [100.000 \ln 6{,}0639] - [100.000 \times 6{,}0639 \times \ln 81{,}4925] + [(6{,}0639 - 1) \times \ln 0{,}5 + \ln 0{,}5 + \cdots + \ln 103] - \left[\frac{1}{81{,}4925} \times (0{,}5^{6{,}0639} + 0{,}5^{6{,}0639} + \cdots + 100^{6{,}0639} - 100.000 \ln 81{,}4925\right] = -418.099{,}7565.$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai fungsi log-likelihood di bawah model frailty. Nilai tersebut sudah diperoleh dalam Subbab 4.2.1 yaitu $l = -522.141{,}7174$. Dengan demikian nilai statistik ujinya adalah

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\theta}, \hat{p})}{L(\tilde{\theta}, \tilde{p}, \tilde{\eta}, \tilde{\rho})} = \frac{-418.099{,}7565}{-522.141{,}7174} = 0.8007,$$

atau $-2(\log(\Lambda)) = 0{,}4445$. Dengan taraf nyata $\alpha = 5\%$, diperoleh nilai persentil ke-$100 \times (1 - 0{,}05) = 95$ dari distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas satu, $\chi_1^2(0{,}95) = 3{,}841$. Karena nilai $-2(\log(\Lambda)) = 0{,}4445 < \chi_1^2(0{,}95) = 3{,}841$, maka hipotesis nol diterima dan disimpulkan bahwa model usia penduduk laki-laki di Indonesia tidak dipengaruhi oleh *frailty* (faktor risiko yang tidak teramati). Dengan demikian model untuk usia untuk penduduk laki-laki di Indonesia yang tidak dipengaruhi oleh *frailty*-nya adalah

$$f(t) = \hat{p}\hat{\theta}^{-\hat{p}}t^{\hat{p}-1}e^{-\left(\frac{t}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{p}}} = 6{,}0639 \times 81{,}4925^{-6{,}0639}t^{6{,}0639-1}e^{-\left(\frac{t}{81{,}4925}\right)^{6{,}0639}};t > 0.$$

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan model *frailty* Weibull-eksponensial dapat digunakan memodelkan heterogenitas pada populasi karena faktor risiko yang tidak dapat diamati. Secara umum terdapat dua tahap dalam penerapan model *frailty* Weibull-eksponensial: (1) menentukan nilai taksiran parameter model *frailty* Weibull-eksponensial menggunakan algoritme EM, (2) menguji kecocokan model *frailty* menggunakan uji rasio *likelihood*. Dalam skripsi ini model *frailty* Weibull-eksponensial diterapkan untuk data Tabel Mortalitas Indonesia tahun 1999 jenis kelamin laki-laki dan perempuan. Hasil pengujian menunjukkan bahwa model usia penduduk Indonesia jenis kelamin laki-laki atau pun perempuan tidak dipengaruhi oleh *frailty* (faktor risiko yang tidak dapat diamati).

Daftar Pustaka

Hogg, R, V. McKean, J, W. Craig, A, T. 2013. *Introduction to Matematical Statistics.* Seventh Edition: Pearson Education, Inc.

Onchere, W. O. 2013. *Frailty Models, Applications in Pension Schemes*. University of Nairobi.

Shanubhogue, A. and Sinojiya, A.R. 2017. *A New Generalized Weibull-Exponential Frailty Model*. Open Journal of Statistics , 7, 84-91. https://doi.org/10.4236/ojs.2017.71007

Sunendiari, S. 2012. Statistika Matematika II. Universitas Islam Bandung. Bandung

Taqwa,Jadi. 2016. *Analisis Kontruksi Model Tabel Mortalitas Lengkap dan Ringkas (Abridged) Pada Asuransi Jiwa*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Malang

Undang-undang Republik Indonesia Nomor 02 Tahun 1992 Tentang Usaha Perasuransian.

Vaupel, J.W., Manton, K.G. and Stallard, E. 1979. *The Impact of Heterogeneity in Individual Frailty on the Dynamics of Mortality. Demography* , 16, 439-454. https://doi.org/10.2307/2061224

Yashin, A.I., Vaupel, J.W. and Iachine, I.A. 1995. *Correlated Individual Frailty: An Advantageous Approach to Survival Analysis of Bivariate Data*. Mathematical Population Studies , 5, 145-159. https://doi.org/10.1080/08898489509525394