# Pemodelan Data Curah Hujan Menggunakan Proses *Shot Noise*

Modeling Rainfall Data Using a *Shot Noise Process*

[1]Novi Tri Wahyuni, [2]Sutawatir Darwis, [3]Teti Sofia Yanti
[1,2,3]*Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116*
*email: [1]ntriwahyuni@gmail.com*

**Abstract.** In this skripsion will be explained about the modeling of rainfall data using the shot noise process. The shot noise process is an extension of the Poisson process which is useful for modeling harmful data where shot marks is a random variable. Arrivals times is Poisson process and the shot function also called an impulse respon function. Shot noise process was applied to rainfall data at Darmaga Bogor station in 1985-2010. The shot size in this case uses the criteria of BMKG that is greater than 100 mm /day. The result of modeling shows that the frequency data of extreme rainfall at Darmaga Bogor station in 1985-2010 distributed Poisson, and shot noise process on extreme rainfall data at Darmaga Bogor station in 1985-2010 distributed Weibull 3 parameters. Using the moment method estimator $q_x$, the highest probability of extreme rainfall in 2005.

**Keywords : Shot Noise Process, Poisson Process, Distribution Weibull 3 Parameters.**

**Abstrak.** Dalam skripsi ini akan dijelaskan mengenai pemodelan data curah hujan menggunakan proses *shot noise*. Proses shot noise adalah perluasan dari proses Poisson yang berguna untuk memodelkan data yang bersifat merugikan dimana besaran shot merupakan suatu peubah acak. Jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu $t$ berdistribusi Poisson, dan fungsi shot $h$ disebut fungsi impuls respon. Proses *shot noise* diaplikasikan untuk data curah hujan di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985-2010. Besaran shot dalam kasus ini menggunakan kriteria dari BMKG yaitu lebih besar dari 100 mm/hari. Hasil pemodelannya menunjukan bahwa data frekuensi curah hujan ekstrim di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985-2010 berdistribusi Poisson, dan besaran shot pada data curah hujan ekstrim di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985-2010 berdistribusi Weibull 3 parameter. Menggunakan metode momen penaksiran $q_x$, peluang terjadinya curah hujan ekstrim tertinggi yaitu pada tahun 2005.

**Kata Kunci : proses shot noise, poisson proses, distribusi weibull 3 parameter.**

## A. Pendahuluan

Banyak fenomena nyata dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan proses stokastik. Berdasarkan waktu, proses stokastik dibedakan menjadi dua, yaitu proses stokastik dengan waktu diskrit dan proses stokastik dengan waktu kontinu. Salah satu proses stokastik dengan waktu kontinu adalah proses Poisson.

Proses Poisson dibedakan menjadi dua, yaitu proses Poisson homogen dan proses Poisson nonhomogen. Pada proses Poisson homogen fungsi intensitas (fungsi nilai harapan) merupakan fungsi yang konstan (tidak bergantung pada waktu), sedangkan pada proses Poisson nonhomogen fungsi intensitas bergantung pada waktu. Bentuk yang lebih luas dari proses Poisson adalah *shot noise* yang digunakan untuk menentukan suatu fungsi karakteristik dengan densitas dan fungsi waktu h(t).

Noise (derau) adalah sederetan gangguan acak yang diambil dari teori bunyi dalam bidang komunikasi. Jika gangguan itu berupa impuls yang terjadi secara acak, maka gangguan itu disebut *shot noise*. Penurunan kualitas suatu kejadian yang mengakibatkan terjadinya kerugian dapat dimodelkan oleh *shot noise*. Contohnya dalam bidang asuransi yaitu proses total klaim, model curah hujan dan seismologi.

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, adapun masalah yang dapat diidentifikasi adalah:

1. Bagaimana proses pemodelan data curah hujan menggunakan proses *shot noise*?
2. Bagaimana menaksir parameter model *shot noise* dan mengukur kecocokan

model dengan data?
3. Berapa penaksir peluang terjadinya curah hujan ekstrim?

Selanjutnya, berdasarkan identifikasi masalah maka tujuan yang ingin dicapai dari penulisan makalah ini adalah:

1. Memahami proses pemodelan data curah hujan menggunakan proses *shot noise*.
2. Menentukan taksiran parameter model *shot noise* dan kecocokan model dengan data.
3. Menaksir peluang terjadinya curah hujan ekstrim.

## B. Landasan Teori

### Proses Poisson

Proses poisson menggambarkan munculnya suatu kejadian pada titik-titik waktu secara acak, dimana proses pencacahan banyaknya kedatangan selama suatu selang waktu tertentu sebagai suatu peubah acak Poisson dengan rata-rata adalah suatu konstanta. Ekspektasi dan varians dari proses Poisson masing-masing adalah:

$$E[X(t)] = \lambda t$$

dan

$$Var[X(t)] = \lambda t$$

proses Poisson nonhomogen, maka $X(t) - X(s)$ merupakan banyaknya kejadian dalam interval (s,t] berdistribusi Poisson dengan laju $\int_s^t \lambda(u)du$ dan waktu antar kejadian berdistribusi eksponensial.

### Proses Shot Noise

*Shot noise* dikatakan sebagai sebuah proses stokastik $A = \{A_t, t \geq 0\}$ yang dirumuskan dengan

$$A_t = \sum_{i=1}^{Xt} Y_i h(t - \tau_i) \qquad (1)$$

Dimana $X = \{X_t : t \geq 0\}$ adalah proses Poisson dengan waktu kedatangan $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan parameter laju $\lambda > 0$, dan $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ adalah barisan peubah acak *independent and identically distributed* (IID) urutan dari “shot marks” yang saling bebas terhadap $X$. Fungsi shot $h$ sering disebut fungsi impuls respon yang diasumsikan sebagai kausal dalam arti $h(t) = 0$ untuk $t > 0$. (Xiao, 2003).

Parameter dalam proses *shot noise* dapat timbul dari tiga sumber. Pertama, jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah variable acak yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter $\lambda$. Kedua, parameter pada fungsi shot tidak diketahui, misalnya $h(t) = e^{-\gamma t}$ untuk $t \geq 0, \gamma \geq 0$, maka parameter $\gamma$ membutuhkan estimasi. Ketiga, misalkan besaran shot pada proses *shot noise* memiliki distribusi Weibull 3 parameter dengan parameter $\gamma$, α, dan β.

### Pemodelan *Shot Noise*

### Penentuan shot

Proses *shot noise* memiliki ciri dengan adanya besaran shot pada interval waktu. shot adalah suatu kejadian yang bernilai besar dan merugikan. Pada kasus curah hujan, besaran shot didasarkan pada nilai curah hujan ekstrim dengan intensitas > 100 mm/hari .

### Distribusi Poisson

Peubah acak diskrit $X$ dikatakan berdistribusi Poisson dengan fungsi peluangnya sebagai berikut:

$$P(K = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2, \dots \tag{2}$$

*Maximum Likelihood Estimation* untuk parameter $\lambda$ dari distribusi Poisson (penurunan pada Lampiran 1) adalah rata-rata sampelnya:

$$\hat{\lambda} = \bar{k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i \tag{3}$$

Jika jumlah kedatangan mengikuti distribusi Poisson $\lambda$ maka suatu variabel acak waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial dengan parameter $\frac{1}{\lambda}$ (Sugito, 2011).

**Distribusi Weibull 3 Parameter**

Distribusi Weibull adalah salah satu distribusi kontinu dalam teori probabilitas (Mutaqin, A.K., 2006).

Fungsi kepadatan peluang distribusi Weibull 3 parameter

$$f(x|\gamma,\beta,\alpha) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{(\alpha-1)} exp\left\{-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} & ;\text{untuk } x > \gamma \\ 0 & ;\text{untuk } x \le \gamma \end{cases} \tag{4}$$

Adapun fungsi distribusi kumulatifnya adalah

$$F(x|\gamma,\beta,\alpha) = \begin{cases} 1 - exp\left\{-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} & ;\text{untuk } x > \gamma \\ 0 & ;\text{untuk } x \le \gamma \end{cases} \tag{5}$$

**Uji Kecocokan Chi-Kuadrat**

Hipotesis untuk Uji kecocokan Chi-kuadrat adalah:

$H_0$ : Terdapat kecocokan antara peluang frekuensi pengamatan dengan distribusi tertentu.

$H_1$ : Tidak erdapat kecocokan antara peluang frekuensi pengamatan dengan distribusi tertentu.

Statistik uji untuk menguji kecocokan chi-kuadrat untuk kasus data diskrit adalah:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad , k = 0,1,2, \dots, k \tag{6}$$

Kriteria pengujiannya adalah tolak hipotesis nol jika nilai statistik uji $\chi^2$ lebih besar dari nilai kritis dengan db = $(k - r - 1)$pada taraf nyata $(\alpha)$ yang ditetapkan.

**Uji Kecocokan Kolmogorov-Smirnov**

Uji Kolmogorov Smirnov merupakan salah satu uji kecocokan model untuk peubah acan kontinu dan data merupakan data individu. Hipotesis untuk uji Kolmogorov-Smirnov adalah:

$H_0$ : Data berasal dari suatu populasi yang berdistribusi tertentu.

$H_1$ : Data bukan berasal dari suatu populasi yang berdistribusi tertentu.

Statistik uji Kolmogorov-Smirnov untuk hipotesis di atas adalah:

$$D = \max_{1 \le i \le n} |F_n(y_i) - F^*(y_i)| \tag{2.7}$$

dimana $F_n(y_i)$ adalah fungsi distribusi empiric untuk data pengamatan ke-$i$, yang dihitung dengan menggunakan rumus

$$F_n(y_i) = \frac{(banyaknya\ pengamatan\ \leq y_i)}{n} \quad (2.8)$$

Sedangkan $F^*(y_i)$ adalah nilai fungsi distribusi kumulatif dari model yang diuji untuk data pengamatan ke-$i$.

**Tabel 1.** Nilai Kritis untuk Uji Kolmogorov-Smirnov

| **Tingkat Signifikansi ($\alpha$)** | 0,10 | 0,05 | 0,01 |
|---|---|---|---|
| **Nilai kritis** | $\frac{1{,}22}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1{,}36}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1{,}63}{\sqrt{n}}$ |

*Sumber: Buku Loss Models*

Hipotesis nol diterima apabila statistik uji *D* lebih kecil dari nilai kritisnya.

**Penaksiran $q_x$ Menggunakan Metode Momen**

London, D (1997) menyatakan bahwa prinsip metode momen penaksiran $q_x$ diperolah dengan menyamakan $E[D_x]$ dengan $d_x$, sehingga diperoleh $\sum_{i=1}^{n} {}_{s_i - r_i}q_{x+r_i} = d_x$. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut akan digunakan aproksimasi, yaitu ${}_{s_i - r_i}q_{x+r_i} \approx (s_i - r_i) \cdot q_x$. Dengan demikian maka persamaan diatas dapat dituliskan sebagai :

$$\sum_{i-1}^{n} (s_i - r_i) \cdot q_x = d_x$$

$$q_x \sum_{i-1}^{n} (s_i - r_i) = d_x$$

Maka penaksir yang dihasilkan oleh metode momen dibawah aproksimasi ${}_{s_i - r_i}q_{x+r_i} \approx (s_i - r_i) \cdot q_x$ adalah

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{\sum_{i-1}^{n} (s_i - r_i)} \quad (9)$$

## C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Skripsi ini menggunakan data curah hujan di stasiun Darmaga Bogor pada tahun 1985-2010 yang bersumber dari BMKG kota Bandung. Data yang digunakan merupakan data curah hujan perhari yang diambil sejak tahun 1985 sampai 2010. Pengamatan yang akan diambil yaitu data perbulan dengan jumlah curah hujan ekstrim 53 pengamatan dalam 312 bulan.

**Pengujian Kecocokan Chi-Kuadrat untuk Distribusi Poisson**

Hipotesis untuk pengujian tersebut adalah:

$H_0$ : Data frekuensi curah hujan ekstrim di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985 2010 berasal dari distribusi Poisson.

$H_1$ : Data frekuensi curah hujan ekstrim di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985-2010 bukan berasal dari distribusi Poisson.

nilai rata-ratanya adalah:

$$\bar{k} = \frac{(0 \times 262) + (1 \times 42) + (2 \times 6) + (3 \times 2)}{312} = 0{,}1923$$

Menggunakan metode maximum likelihood maka hasil penaksirannya adalah $\hat{\lambda} = 0{,}1923$.

**Tabel 2.** Taksiran Nilai Peluang dan Harapan Terjadinya Curah Hujan Ekstrim

| Kategori Curah Hujan Ekstrim $k$ | Frekuensi Curah Hujan Ekstrim $O_i$ | Nilai Harapan Terjadinya Curah Hujan Ekstrim $E_i$ |
|---|---|---|
| **(1)** | **(2)** | **(4)** |
| 0 | 262 | 257,4312 |
| 1 | 42 | 49,5144 |
| 2 | 6 | 4,7736 |
| 3 | 2 | 0,312 |
| **Jumlah** | **312** | **312.0312** |

*Sumber: Hasil Perhitungan*

Karena ada nilai harapan yang lebih kecil dari 5 maka kategori 3 dan 2 digabungkan.

**Tabel 3.** Nilai-Nilai yang Dibutuhkan untuk Perhitungan Statistik Uji

| Kategori Curah Hujan Ekstrim $k$ | Banyaknya Curah Hujan Ekstrim $O_i$ | Peluang Terjadinya Curah Hujan Ekstrim $p_i$ | Nilai Harapan Terjadinya Curah Hujan Ekstrim $E_i$ | $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ |
|---|---|---|---|---|
| **(1)** | **(2)** | **(3)** | **(4)** | **(5)** |
| **0** | 262 | 0.8251 | 257,4312 | 0,0811 |
| **1** | 42 | 0.1587 | 49,5144 | 1,1404 |
| $\geq 2$ | 8 | 0.0162 | 5,0856 | 1,6702 |
| **Jumlah** | **312** | **1** | **251,9748** | **2,8917** |

*Sumber: Hasil Perhitungan*

Nilai statistik uji chi-kuadrat untuk data frekuensi curah hujan ekstrim yaitu 2,8917. Dengan taraf nyata 5% , nilai nilai kritis distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 1 (3-1-1) adalah 3,84. Terlihat bahwa nilai statistik ujinya lebih kecil dari nilai kritis (2,8917 < 3,84). Dengan demikian hipotesis nol diterima dan disimpulkan bahwa data frekuensi curah hujan ekstrim di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985-2010 berasal dari populasi yang berdistribusi Poisson.

**Pengujian Kecocokan Distribusi Weibull 3 parameter menggunakan Uji Kolmogorov-Smirnov**

Hipotesisnya adalah sebagai berikut:

$H_0$ : Curah hujan ekstrim di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985-2010 berasal dari suatu populasi yang berdistribusi Weibull 3 parameter.

$H_1$ : Curah hujan ekstrim di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985-2010 bukan berasal dari suatu populasi yang berdistribusi Weibull 3 parameter.

Nilai taksirannya didapat menggunakan software *easyfit*, yaitu $\hat{\gamma} = 101{,}1$,

$\hat{\beta} = 12{,}599$, dan $\hat{\alpha} = 0{,}53973$. Statistic ujinya adalah

$$D = \max_{1 \le i \le n} |F_n(y_i) - F^*(y_i)| = 0.0973$$

Tingkat signifikansi, $\alpha = 5\%$, nilai kritisnya adalah $\frac{1{,}36}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}36}{\sqrt{60}} = 0{,}1756.$ sehingga hipotesis nol diterima dan disimpulkan bahwa curah hujan ekstrim di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985-2010 berasal dari suatu populasi yang berdistribusi Weibull 3 parameter.

**Metode Penaksiran $q_x$ Menggunakan Metode Momen**

Nilai $r_i$ diasumsikan sama dengan 0 karena curah hujan ekstrim tidak diketahui waktu masuknya curah hujan ekstrim pada selang $[x, x+1]$, sedangkan $s_i$ pada kasus curah hujan ekstrim yaitu tanggal terjadinya curah hujan ekstrim dibagi jumlah hari pada bulan tersebut. Dengan menggunakan rumus Persamaan (2.9), maka nilai Penaksir Peluang curah hujan ekstrim tahun 1985-2010, adalah.

**Tabel 4.** Nilai Penaksir Peluang curah hujan ekstrim tahun 1985-2010

| Tahun | $\hat{q}_x$ | Tahun | $\hat{q}_x$ | Tahun | $\hat{q}_x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1985 | 0,1831 | 1994 | 0.0000 | 2003 | 0.1962 |
| 1986 | 0,3613 | 1995 | 0.0901 | 2004 | 0.5117 |
| 1987 | 0,4282 | 1996 | 0.2674 | 2005 | 0.6836 |
| 1988 | 0,3863 | 1997 | 0.0857 | 2006 | 0.1699 |
| 1989 | 0,3924 | 1998 | 0.0875 | 2007 | 0.2678 |
| 1990 | 0.2591 | 1999 | 0.0836 | 2008 | 0.1890 |
| 1991 | 0.0893 | 2000 | 0.0000 | 2009 | 0.0893 |
| 1992 | 0.1818 | 2001 | 0.0849 | 2010 | 0.1824 |
| 1993 | 0.0862 | 2002 | 0.1818 | | |

*Sumber: Hasil Perhitungan*

## C. Kesimpulan

Proses *shot noise* untuk kasus curah hujan memiliki “shot marks” didasarkan pada nilai curah hujan yang lebih dari 100. Jumlah waktu antar kedatangan pada proses *shot noise* berdistribusi Poisson. Dan variabel acak “shot marks” pada kasus curah hujan ekstrim di stasiun Darmaga Bogor tahun 1985-2010 berdistribusi Weibull 3 parameter.

## Daftar Pustaka

Badan Meteorologi, Klimatologi dan Geofisika. (2011). *Analisis Hujan Bulan Januari 2011 dan Prakiraan Hujan Bulan Maret, April, dan Mei 2011 Provinsi Banten dan DKI Jakarta*. Tangerang: BMKG.

Klugman, S.A., Panjer, H.H., dan Wilmot, G.E. (2008). *Loss Models. From data to decisions.* Edisi Ketiga. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons.

Mutaqin, A.K., (2006). *Komputasi Statistika dengan Matlab.* Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Islam Bandung. Bandung.

Xiao, Y. (2003). *Shot Noise Processes*. Disertasi tidak dipublikasikan. Georgia: Graduate Faculty, University of Georgia.