Klasifikasi Keadaan dalam Rantai Markov Menggunakan Algoritma Graf

Classification of States of Markov Chains Using Graph Algorithms

[1]Yussy Anistia Nurislamiyati, [2]Suwanda, [2]Lisnur Wachidah
[1,2,3]Prodi Statistika, FakultasMatematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116
email: [1]yussyanistia18@gmail.com, [2]wanda_100358@yahoo.com

Abstract. The stochastic process can be defined as the set of random variables that are indexed. The value of the random variable is a collectionr of the state space and the index is a collection of the parameter space. Element of the state space and parameter space, may be discrete or continuous. The probability of a state at time t depends only on time s and does not depend on the state of time u with u < s < t is called as Markov chain. The values of probability that change from one to another at a time are arranged into a transition probability matrix. Based on the transition probability matrix, the sates of markov chain can be classified into one or more classes. If the classified class is more than one, states may be grouped into transient and recurrent. A transient state can visit a recurrent state but not for recurrent state. Determination of classification of states helps to construct a transition probability matrix into a canonical form that can be used to determine how long a transient state is in its class before switching to a recurrent state. If the sates classified into a class, then further analysis can be proceed to determine the long-term behavior of the transition probability matrix. In the case of a considerable number of states the process of classifying satates becomes not simple. This paper discussed about the classification of the state using graph algorithm that can be implemented for a large number of sates.

Keywords : Stochastic Process, Markov Chains, Graph Algorithms, Transient, Recurrent.

Abstrak. Proses stokastik dapat didefinisikan sebagai himpunan dari peubah acak yang diberi indeks. Nilai dari peubah acak merupakan anggota ruang keadaan dan indeks merupakan anggota ruang parameter. Anggota ruang keadaan dan ruang parameter, dapat bersifat diskrit ataupun kontinu. Probabilitas suatu keadaan pada waktu ke t yang hanya bergantung pada waktu ke s dan tidak tergantung pada keadaan waktu ke u dengan u < s < t disebut rantai Markov. Nilai-nilai probabilitas dari perubahan kedaan yang satu ke keadaan yang lain untuk satu satuan waktu disusun kedalam matriks probabilitas transisi. Berdasarkan matriks probabilitas transisi keadaan-keadaan yang mungkin dapat dikelompokan kedalam satu atau beberapa kelas. Apabila kelas yang terbentuk lebih dari satu, keadaan-keadaan yang mungkin dapat dikelompokan kedalam beberapa kelompok yang bersifat transient dan recurrent. Keadaan yang transient dapat mengunjungi keadaan recurrent akan tetapi tidak sebaliknya. Penentuan kelas klasifikasi keadaan membantu untuk menyusun matriks probabilitas transisi kedalam bentuk kanonik yang berguna untuk menentukan seberapa lama sebuah keadaan transient berada di dalam kelasnya sebelum berpindah ke keadaan recurrent. Apabila kelas yang terbentuk adalah satu maka analisis selanjutnya dapat dilanjutkan untuk menentukan perilaku jangka panjang dari matriks probabilitas transisi. Dalam hal banyaknya keadaan cukup besar proses klasifikasi keadaan menjadi tidak sederhana. Dalam makalah ini dibahas tentang klasifikasi keadaan menggunakan algoritma graf yang memungkinkan dapat diimplementasikan untuk banyaknya keadaaan yang cukup besar.

Kata Kunci : Proses Stokastik, Rantai Markov, Algoritma Graf, Transient, Recurrent.

A. Pendahuluan

Rantai Markov (*Markov Chain*) adalah sebuah teknik perhitungan yang umumnya digunakan dalam melakukan pemodelan bermacam-macam kondisi. Kondisi-kondisi dalam pemodelan rantai markov tersebut umumnya akan sangat berkaitan erat dengan banyaknya keadaan yang sering kita hadapi di kehidupan ini, dimana keadaan-keadaan tersebut nantinya akan dapat diklasifikasikan sesuai dengan sifat-sifat antar keadaan yang terbentuk. Dengan mengklasifikasikan keadaan-keadaan dalam rantai markov kita akan dapat mengetahui keadaan mana saja yang dapat diakses dari keadaan lainnya dan keadaan mana yang saling berkomunikasi satu sama lain yang akan membentuk suatu kelas ekuivalen. Apabila seluruh keadaan berkomunikasi satu sama lain maka akan terbentuk satu kelas yang *ireducible*, artinya seluruh keadaan dapat mencapai satu sama lain dalam satu atau beberapa langkah sehingga nantinya kita akan dapat menanalisis perilaku jangka panjang dari keadaan-keadaan tersebut. Apabila keadaan-keadaan tersebut membentuk lebih dari satu kelas yang berkomunikasi satu sama lain maka pengklasifikasian ini akan sangat berguna untuk menyusun dan menyederhanakan analisis dari rantai markov serta dapat memberikan sebuah representasi kanonik untuk mengetahui seberapa lama suatu kelas akan tinggal di kelasnya hingga mencapai suatu kelas yang tetap.

Pada saat jumlah keadaannya masih tergolong kecil maka pengklasifikasian ini dapat dengan mudah dilakukan dengan observasi atau dengan hanya mencatat hubungan komunikasi antar keadaan. Ketika jumlah keadaan menjadi besar, dibutuhkan beberapa algoritma yang dapat mencapai tujuan ini secara baik dan benar. Dalam hal ini algoritma graf akan digunakan untuk menyederhanakan dan memberikan representasi kanonik dari keadaan-keadaan dalam jumlah yang tidak sedikit. Keadaan-keadaan yang didapatkan pada matriks probabilitas transisi akan dinyatakan sebagai titik (*vertex*) dan kemungkinan transisi diantara dua keadaan sebagai sisi (*edge*) untuk representasi visual dari algoritma graf.

Adapun masalah yang muncul dari latar belakang di atas adalah bagaimana mengklasifikasikan keadaan-keadaan dalam rantai markov menggunakan algoritma graf ? bagaimana analisis selanjutnya apabila terjadi rantai markov dengan beberapa kelas dan bagaimana jika hanya satu kelas yang terbentuk ? dan bagaimana implementasinya terhadap data *real*?. Dengan demikian tujuan dari makalah ini adalah untuk mengklasifikasikan keadaan-keadaan dalam rantai markov menggunakan algoritma graf, menentukan analisis yang diambil sesuai dengan banyaknya kelas-kelas yang terbentuk dari pengklasifikasian keadaan dan mengetahu implementasinya terhadap dara *real*.

B. Landasan Teori

Rantai Markov

Proses stokastik didefinisikan sebagai kumpulan dari variabel acak yang diindeks oleh himpunan T, yang keseluruhan nilainya berada dalam ruang keadaan S, atau dapat ditulis $\{X(t) : t \in T\}$. Dalam banyak kasus, nilai $t \in T$ biasanya diartikan sebagai waktu, sehingga $X(t)$ dapat diartikan sebagai nilai observasi pada waktu t.

Himpunan T dalam proses stokastik disebut dengan indeks set atau parameter set. Jika indeks set dari sebuah proses stokastik mempunyai banyaknya elemen yang terbatas atau dapat dihitung (countable) maka proses stokastik dikatakan diskrit, sedangkan apabila indeks set adalah interval dari real line maka proses stokastik dikatakan kontinu. Begitu pula halnya dengan ruang keadaan S dalam proses stokastik. Jika ruang keadaan adalah bilangan bulat atau natural numbers, maka proses stokastik disebut sebagai proses stokastik dengan ruang keadaan diskrit. Apabila ruang keadaanya real line, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses stokastik dengan ruang keadaan kontinu.

Analisis markov sendiri merupakan bentuk khusus dari proses stokastik dimana, sebuah proses stokastik X_t dikatakan markov atau mempunyai sifat markov jika untuk semua $t \geq 1$, distribusi peluang dari X_{t+1} ditentukan oleh keadaan X_t dari proses pada waktu t dan tidak tergantung dari nilai yang lalu dari X_k untuk $k \leq t-1$, sehingga untuk semua $t \geq 1$,

$$P\left(X_{t+1} = j \middle| X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0\right) = P\left(X_{t+1} = j \mid X_t = i_t\right)$$

Probabilitas bersyarat $P\left\{X_{t+1} = j \middle| X_t = i\right\}$ dikatakan sebagai probabilitas transisi. Probabilitas transisi sendiri adalah perubahan dari satu keadaan ke keadaan yang lain pada periode (waktu) berikutnya dan merupakan suatu proses random yang dinyatakan dalam probabilitas. Jika untuk setiap i dan j :

$$P\{X_{t-1} = j \mid X_t = i\} = P\{X_1 = j \mid X_0 = i\} \qquad \text{untuk semua t = 0, 1, …}$$

Maka probabilitas transisi (1 langkah) dikatakan stasioner, (probabilitas transisi tidak berubah terhadap waktu) dinotasikan dengan p_{ij}. Jika untuk setiap i dan j :

$$P\{X_{t-1} = j \mid X_t = i\} = P\{X_n = j \mid X_0 = i\} \qquad \text{untuk semua t = 0, 1, …}$$

Maka probabilitas bersyarat ini disebut sebagai probabilitas transisi n-langkah dan dinotasikan dengan $p_{ij}^{(n)}$. $p_{ij}^{(n)}$ merupakan probabilitas bersyarat dimana peubah acak X, dimulai dari *state* i, akan berada pada *state* j setelah tepat n langkah (unit waktu). Karena $p_{ij}^{(n)}$ adalah probabilitas bersyarat maka harus memenuhi sifat-sifat :

$p_{ij}^{(n)} \geq 0 \quad \forall i$ dan j, $n = 0,1,\ldots$ (sifat ketidaknegatifan)

$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \forall i$ dan j $n = 0,1,\ldots$ (jumlah dari probabilitas sama dengan satu)

Untuk merangkum probabilitas transisi satu tahap digunakan notasi matriks :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ddots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Dari matriks probabilitas tersebut keadaan-keadaan dalam rantai Markov dapat diklasifikasikan sebagai berikut :

1. Dapat dicapai (Accessible)
2. Keadaan j dikatakan dapat dicapai (accessible) dari keadaan i jika $p_{ij}^{(n)} > 0$ untuk beberapa n > 0.
3. Berkomunikasi (Communicate)
4. Jika keadaan j dapat dicapai dari keadaan i, dan keadaan i dapat dicapai dari keadaan j, maka keadaan i dan j dikatakan berkomuniasi (communicate) .
5. Tak dapat direduksi (Irreducible)
6. Rantai markov dikatakan irreducible jika hanya mempunyai satu kelas saja, jadi semua keadaan saling berkomunikasi.
7. Absorbing
8. Suatu keadaan i dikatakan sebagai keadaan yang absorbing jika probabilitas transisi satu langkah $p_{ii} = 1$. Jadi sekali sistem memasuki keadaan i maka sistem akan tetap selamanya berada di keadaan i tersebut.
9. Recurrent dan Transient
10. Keadaan i dikatakan recurrent jika dan hanya jika :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

Mulai dari keadaan i, setelah keluar dari keadaan i sistem pasti akan dapat kembali lagi ke keadaan i.
keadaan i dikatakan *transient* jika dan hanya jika :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$$

Representasi kanonik

Misalkan rantai Markov dengan *m* keadaan yang mengandung *r* – keadaan *recurrent* dan (*m* – *r*) keadaan *transient* yang termasuk kepada sebuah kelas ekuivalen. T menjadi himpunan dari keadaan *transient* dan T^c sebagai himpunan dari keadaan *recurrent*. Matriks probabilitas transisi P dapat dimasukan kedalam bentuk

$$P = \left[\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline R & Q \end{array}\right] \qquad \text{. . . (1)}$$

Dimana P_1 adalah sebuah matriks *r x r* dengan probabilitas transisi diantara keadaan-keadaan *recurrent* untuk elemennya; *Q* adalah sebuah (*m* – *r*) x (*m* – *r*) submatriks (dengan setidaknya jumlah satu baris kurang dari 1) dengan probabilitas transisi hanya diantara keadaan *transient* untuk elemenya; dan *R* adalah sebuah matriks (*m* – *r*) x *r* yang elemenya adalah probabiltas dari transisi satu langkah dari (*m* – *r*) keadaan *transient* ke *r* keadaan *recurrent*.

Matriks $M = (1-Q)^{-1}$ disebut sebagai *fundamental matrix*. $N_{ij}(i, j \in T)$ menjadi peubah acak yang menunjukan lamanya waktu proses mengunjungi *j* sebelum akhirnya mengunjungi sebuah kelas *recurrent*, yang mana keadaan awalnya dimulai dari keadaan *i*. Misal $\mu_{ij} = E\lfloor N_{ij} \rfloor$, untuk $i, j \in T$

$$\|\mu_{ij}\| = (I-Q)^{-1} = M \qquad \text{. . . (2)}$$

Merupakan rata-rata dari lamanya waktu proses mengunjungi *j* sebelum akhirnya mengunjungi sebuah kelas *recurrent* dengan keadaan awal *i*.

Melalui definisi varians

$$V(N_{ij}) = E(N_{ij}^2) - [E(N_{ij})]^2$$

Untuk $\sigma_{ij}^2 = V(N_{ij})$, dan rata-rata dari persamaan (2.2) didapatkan

$$\|\sigma_{ij}^2\| = M(2M_D - I) - M_2 \quad i, j \in T \qquad \text{. . . (3)}$$

Yang merupakan varians dari lamanya waktu proses mengunjungi j sebelum akhirnya mengunjungi sebuah kelas recurrent dengan keadaan awal i. Dimana MD adalah diagonal matriks M dan M2 adalah kuadrat setiap elemen matriks M.

Varibel dari $N_i = \sum_{j \in T} N_{ij}$ merupakan jumlah banyaknya langkah yang dihabiskan di dalam keadaan *transient* sebelum memasuki sebuah keadaan *recurrent*.
Untuk mengetahui ekspektasi dan variansnya adalah

$$\|E(N_i)\| = M_\rho \qquad i \in T \qquad \text{. . . (4)}$$

$$\|V(N_i)\| = (2M - I)M_\rho - M_{\rho 2} \qquad \text{. . . (5)}$$

Dimana M_ρ adalah sebuah kolom vektor dimana komponen ke k adalah jumlah dari elemen-elemen baris ke k matriks M, dan $M_{\rho 2}$ merupakan sebuah kolom vektor yang komponen ke-k nya adalah kuadrat dari komponen ke-k dalam matriks M_ρ .

Perilaku Jangka Panjang

Masalah yang muncul berikutnya adalah bagaimana probabilitas transisi untuk jangka panjang $\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$. Untuk rantai Markov *irreducible* vektor-vektor kolom dan matriks Π akan sama, artinya untuk suatu keadaan pada jangka panjang akan menuju ke masing-masing keadaan dengan probabilitas sama matriks Π dapat dicari dengan rumus

$$\Pi P = \Pi \text{ atau } \pi P = \pi \qquad \ldots (6)$$

Klasifikasi Keadaan Menggunakan Algoritma Graph

Dengan menggunakan algoritma graf, keadaan – keadaan yang berasal dari rantai markov diidentifikasi sebagai *vertex/*titik dan transisi satu tahap yang mungkin akan diidentifikasi sebagai sisi. Sehingga sebuah sisi (i , j) antara keadaan i dan j ada jika probabilitas dari transisi $i \rightarrow j$ lebih besar dari pada nol. Graf yang didefinisikan melalui prosedur ini diketahui sebagai sebuah Markov graf atau Stokastik graf.

Misal x : { x_1, x_2 , ..., x_m } menjadi vertex atau titik simpul, dan $\boldsymbol{a}$ menjadi himpunan dari sisi langsung antara titik-titik tersebut. Graf $\boldsymbol{G}$ = { $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}$ } merupakan graf langsung (*directed graph*/digraph). Sebuah jalur (*path*) dalam *directed graph* merupakan setiap rangkaian dari sisi dimana titik akhirnya merupakan titik awal dari sisi selanjutnya. Jalur a_1 , a_2 , ... , a_k yang titik awanya a_1 sama seperti titik akhir dari a_k disebut sebagai *circuit*. *Outdegree* dari titik x_i didefinisikan sebagai banyaknya sisi dengan titik awalnya adalah x_i. *Indegree* dari titik x_i merupakan banyakya sisi dimana x_i merupakan titik akhirnya.

Sebuah graf dikatakan *strongly connected* (terhubung dengan kuat) atau *strong* jika untuk setiap dua titik yang berbeda x_i dan x_j terdapat setidaknya satu jalur yang bergerak dari x_i ke x_j. Sebuah *maximal subgraph* dari G adalah *strong subgraph* dari G yang tidak terdapat di setiap *strong subgraph* lainnya dari G. Subgraf yang seperti itu disebut *strong component* dari G.

Misalkan y = { y_1, y_2, . . . , y_k } merupakan *strong component* dari G, dimana y_i merupakan sebuah subgraph dengan titik $\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir_i}\}$, i = 1,2, . . . , k , dan mengidentifikasi sebuah titik yang berhubungan untuk setiap y_i . misalkan c menjadi himpunan sisi antara titik – titik tersebut. Hasil dari graph G^* = (y, c) disebut sebagai *condensed graph* dari G. Diberikan sebuah graph G, *adjacency matrix* $A = \|a_{ij}\|$ diberikan oleh

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 ; & \text{jika sisi } (x_i, x_j) \text{ ada di } G \\ 0 ; & \text{lainnya} \end{cases} \qquad \ldots (7)$$

Dengan demikian elemen-elemen dari *adjacency matrix* mengindikasi kemungkinan pergerakan antara dua titik dalam satu langkah/step (bergerak disepanjang satu sisi disebut dengan langkah/step). Untuk memperluas definisi ini kepada lebih dari satu langkah, kita dapat mendefinisikan *reachability matrix* $R = \|r_{ij}\|$ sebagai

$$r_{ij} = 1 \quad \text{jika } x_j \text{ bisa dicapai dari } x_i \text{ dengan tanpa pembatasan banyaknya langkah yang diambil}$$

$$= 0 \quad \text{lainnya} \qquad \ldots (8)$$

Pada dasarnya *adjacency matrix* mengindikasikan kemungkinan dua titik dapat dicapai dalam satu step, sedangkan *reachability matrix* mengidikasikan kemungkinan dua titik dapat dicapai dalam lebih dari satu step.

Secara keseluruhan untuk menghitung dan mendapatkan *reachability matrix* R dari *adjacency matrix* A akan bersangkutan dengan *Boolean Arithmetic*. Dimana perbedaan perhitungan dengan operasi aritmatika biasanya adalah bahwa dalam *Boolean Arithmetic* 1+1=1, sehingga jika dihubungkan dengan hukum yang lama bahwa 1+0=1 dapat disimpulkan bahwa dalam hukum yang baru ini 1 ditambah angka berapapun hasilnya akan sama dengan 1.

Sebuah algoritma yang diberikan oleh Warshall (1962) digunakan untuk menentukan *reachability matrix R* dengan $R^{(k)} = \left\| r_{ij}^{(k)} \right\|$. Menentukan $R^{(k)}$, k = 1, 2, 3, 4, ... , p berulang-ulang sebagai

$$r_{ij}^{(1)} = a_{ij}$$

$$r_{ij}^{(k)} = r_{ij}^{(k-1)} \vee \left[r_{ik}^{(k-1)} \wedge r_{kj}^{(k-1)} \right] \qquad \text{untuk } k > 1 \qquad \ldots (9)$$

Dimana $\vee$ dan $\wedge$ digunakan untuk menunjukan penambahan dan perkalian operasi Boolean secara berturut-turut. Untuk menyerdehanakan perhitungan persamaan dalam kurung yang merupakan operasi Boolean dapat dimisalkan sebagai matriks $S^{(k)}$.

Dari persamaan tersebut kita akan mendapatkan $R(x_i)$ sebagai himpunan dari titik-titik dari graph G yang bisa dicapai dari x_i. $Q(x_i)$ didefinisikan sebagai himpunan dari titik-titik yang dapat mencapai x_i. Matriks $Q = \left\| q_{ij} \right\|$ disebut dengan *reaching matrix* dimana $Q = R^T$ (yang merupakan transpose dari R). Oleh karena itu, hasil perkalian Boolean *element-by-element* matriks R dan Q akan memberikan kelas-kelas dari matriks probabilitas transisi dimana, titik-titik yang berhubungan dengan elemen tak nol dalam baris yang berbeda dari matriks ini memberikan *strong component* dari graph G. Jika kelas ekuivalen adalah *recurrent*, titik-titik yang bersesuaian di *condensed graph* mempunyai *outdegree* 0. Di lain hal, kelas tersebut *transient*

Langkah selanjutnya dalam analisis ini adalah menyusun matriks probabilitas tansisi dalam bentuk kanonik, dengan menetapkan sebuah hirarki untuk *strong components*. Dalam bentuk kanonik, kelas-kelas ekuivalen *recurrent* menempati tingkatan yang lebih tinggi di hirarki daripada kelas-kelas *transient*.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Data yang digunakan dalam makalah ini adalah data sekunder berupa hasil survey melalui kuesioner yang dilakukan kepada 531 mahasiswa dari universitas yang berbeda di Istanbul (Cay & Uslu, 2014).

Keadaan yang akan dianalisis dari data tersebut adalah 12 jenis merek sepatu yang juga menjadi ruang keadaan dari analisis rantai markov. 12 merek sepatu tersebut terdiri dari Adidas, Nike, Reebok, Puma, Slazenger, Kappa, Diadora, Ellese, Le coq sportif, Asix, Converse, dan Lainya. Hasil dari survey tersebut disusun kedalam matriks probabilitas transisisi yang menggambarkan hubungan antara preferensi merek pembelian yang ada dan yang akan datang. Matriks probabilitas transisi mengenai preferensi merek sepatu disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Matriks Probabilitas Transisi untuk Preferensi Merek Sepatu

	Adidas	Nike	Reebok	Puma	Slazenger	Kappa	Diadora	Ellese	Le sportif	Six	Converse	Lainnya
Adidas	0.042	0.563	0.204	0.024	0.06	0.006	0.012	0.006	0.012	0.006	0.018	0.047
Nike	0.472	0.016	0.276	0.057	0.041	0.008	0.033	0.008	0	0.008	0.008	0.073
Reebok	0.36	0.488	0.012	0.023	0.047	0	0.012	0	0.012	0.012	0	0.034
Puma	0.438	0.25	0	0	0.123	0	0	0	0.063	0.063	0.063	0
Slazenger	0.395	0.289	0.184	0	0.053	0	0.026	0.053	0	0	0	0
Kappa	0	0.5	0.25	0	0	0.25	0	0	0	0	0	0
Diadora	0.111	0.333	0	0.111	0.111	0.111	0	0	0	0	0.111	0.112
Ellese	0	0.6	0	0	0.2	0.2	0	0	0	0	0	0
Le sportif	0	0.571	0.286	0.143	0	0	0	0	0	0	0	0
Six	0.167	0	0.167	0.167	0.167	0.166	0	0	0.166	0	0	0
Converse	0.4	0.2	0	0	0.2	0	0	0	0	0	0.2	0
Lainnya	0.309	0.4	0.055	0	0.036	0	0.036	0.018	0	0	0.018	0.128

Sumber: Hasil Penelitian Cay & Uslu, 2014

Dari tabel matriks probabilitas transisi tersebut diperoleh *adjacency matriks* A melalui Persamaan (7), sebagai berikut

Tabel 2. Adjacency Matrix R

	Adidas	Nike	Reebok	Puma	Slazenger	Kappa	Diadora	Ellese	Le sportif	Six	Converse	Lainnya
Adidas	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Nike	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
Reebok	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
Puma	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
Slazenger	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
Kappa	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Diadora	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
Ellese	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
Le sportif	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Six	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
Converse	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
Lainnya	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1

Melalui Persamaan (8) diperoleh *reachability matrix* R sebagai berikut

Tabel 3. Reachability Matrix R

	Adidas	Nike	Reebok	Puma	Slazenger	Kappa	Diadora	Ellese	Le coq sportif	Six	Converse	Lainnya
Adidas	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Nike	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Reebok	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Puma	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Slazenger	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Kappa	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Diadora	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ellese	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Le coq sportif	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Six	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Converse	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Lainnya	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Dari tabel di atas, dapat diketahui bahwa kelas yang terbentuk hanya satu sehingga akan langsung dilanjutkan pada analisis untu menentukan perilaku jangka panjang dari matriks probabilitas transisi melalui Persamaan (6) sebagai berikut

Tabel 4 Matriks Probabilitas Transisi Jangka Panjang

	Adidas	Nike	Reebok	Puma	Slazenger	Kappa	Diadora	Ellese	Le sportif	Six	Converse	Lainnya
Adidas	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Nike	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Reebok	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Puma	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Slazenger	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Kappa	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Diadora	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Ellese	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Le sportif	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Six	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Converse	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
Lainnya	0.29	0.32	0.17	0.03	0.06	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan beberapa hasil penelitian sebagai berikut:

1. Klasifikasi keadaan menggunakan algoritma graf akan memudahkan dalam menentukan kelas-kelas yang terbentuk dari matriks probabilitas transisi khususnya untuk keadaan yang tidak kecil dengan menentukan *reachability matrix R* dan *reaching matrix* Q
2. Hasil dari *raechability matrix* R memperlihatkan bahwa keadaan-keadaannya saling berkomunikasi satu sama lain dan membentuk satu kelas yang *irreducible*(tidak dapat direduksi). Sehingga analisis selanjunya dilanjutkan untuk menentukan matriks probabilitas transisi jangka panjang.
3. Dari matriks probabilitas transisi jangka panjang yang terbentuk , sepatu dengan merek Nike mempunyai nilai probabilitas yang tinggi untuk dibeli pada pembelian sepatu olah raga berikutnya dengan nilai probabilitas sebesar 0.32 atau dapat diartikan bahwa 32% dari responden akan memilih sepatu dengan merek Nike untuk pembelian berikutnya.
4. Sepatu-sepatu dengan merek Kappa, Ellese, Le Sportif dan Six, menjadi merek sepatu dengan probabilitas yang kecil untuk dibeli pada pembelian berikutnya dengan nilai probailitas sebesar 0.01

Daftar Pustaka

Ash, C. (2014). *Undergraduate Course Notes on Discrete Math.* Mathematics University of Illinois.

Bhat, U. N., & Miller, G. K. (2002). *Element of Applied Stochastic Processes.* Wiley.

Boffey , T. B. (1982). *Graph Theory in Operations Research.* London: The Macmillan Press, Ltd.

Cay, T., & Uslu, A. (t.thn.). *Analysis of Brand Loyalty with Markov Chains.* Turkey: Marmara University .

Everitt, B. S. (2002). *The Cambridge Dictionary of Statistics.* CUP.

Florescu, I. (2014). *Probability and Stochastic Processes.* John Wiley & Sons.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2008). *Introduction to Operations Research.* Yogyakarta: ANDI.

Joseph, L. D. (1990). *Stochastic Processes.* Wiley.
Karlin, S., & Taylor, H. E. (1975). *A First Course in Stochastic Processe.* California: Academic Press.
Lamperti, J. (1977). *Stochastic Processes : A Survey of The Mathematical Theory.* Springer.
Privault, N. (2013). *Understanding Markov Chains Examples and Application.* Singapore: Springer.
Suwanda. (2016). *Proses Stokastik.* Bandung: Seri Buku Ajar Universitas Islam Bandung.