Penentuan Distribusi Kerugian Agregat Tertanggung Asuransi Kendaraan Bermotor di Indonesia Menggunakan Metode Rekursif Panjer

Determination of Aggregate Insured Losses Distribution on Vehicle Insurance In Indonesia Using Recursion Panjer Methods

[1]Dianti Ayu Utami, [2]Aceng K.Mutaqin, [3]Lisnur Wachidah
[1,2,3]Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung
Jl. Taman Sari No.1 Bandung 40116
Email: [1]ayuutami934@gmail.com, [2]aceng.k.mutaqin@gmail.com, [3]lisnur_w@yahoo.com

Abstract. In the insurance sector aggregate loss is the total loss suffered by an insured to be borne by the insurance company within a certain period of time. Aggregate loss depends on the frequency of claims and the large claims for each claim. One of the important things in the general insurance premiums calculating is to know the distribution of aggregate loss. There are several methods that can be used to determine the distribution of aggregate loss. Generally, there are two types of analytic solutions to determine the aggregate loss distribution, which is based on the convolution and based on the characteristic function. When the analytic solutions are not found, then used its numerical methods such as Monte Carlo, Fast Fourier Transform (FFT) and recursion Panjer. In this paper will discuss the methods that are numerical to determine the distribution of aggregate loss, the recursion Panjer method. This method will be applied to model the aggregate loss claims by using this type of claim partial loss of motor vehicle insurance category 7 (buses) in Indonesia. The results show that the distribution of applications suitable for data frequency of motor vehicle insurance claim 7 categories in Indonesia is a negative binomial distribution. The suitable distribution for large data motor vehicle insurance claims 7 categories in Indonesia is the lognormal distribution. Value opportunities for aggregate loss equal to 0 are 0.9242. Thus the value of the cumulative distribution function for the aggregate loss greater than or equal to 0 starting from 0.9242.

Keywords: Aggregate loss, monte carlo, fast fourier transform, panjer recursion method, partial loss.

Abstrak. Dalam bidang asuransi kerugian agregat adalah total kerugian yang dialami oleh seorang tertanggung yang harus ditanggung oleh perusahaan asuransi dalam suatu periode waktu tertentu. Kerugian agregat tergantung pada frekuensi klaim dan besar klaim setiap kali klaim. Salah satu hal penting dalam menghitung premi asuransi umum adalah mengetahui distribusi dari kerugian agregat. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan distribusi kerugian agregat. Secara umum ada dua jenis solusi analitik untuk menentukan distribusi kerugian agregat, yaitu berdasarkan konvolusi dan berdasarkan fungsi karakteristik. Ketika solusi analitik tidak ditemukan, maka digunakan metode yang sifatnya numerik seperti Monte Carlo, *Fast Fourier Transform* (FFT) dan rekursif Panjer. Dalam skripsi ini akan dibahas satu metode yang sifatnya numerik untuk menentukan distribusi kerugian agregat, yaitu metode rekursif Panjer. Metode ini akan diterapkan untuk memodelkan kerugian agregat klaim dengan menggunakan jenis klaim *partial loss* asuransi kendaraan bermotor kategori 7 (kendaraan bus) di Indonesia. Hasil aplikasi menunjukkan bahwa distribusi yang cocok untuk data frekuensi klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7 di Indonesia adalah distribusi binomial negatif. Distribusi yang cocok untuk data besar klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7 di Indonesia adalah distribusi lognormal. Nilai peluang untuk kerugian agregat sama dengan 0 adalah 0,9242. Dengan demikian nilai fungsi distribusi kumulatif untuk kerugian agregat yang lebih besar atau sama dengan 0 dimulai dari 0,9242.

Kata Kunci: kerugian agregat, Monte Carlo, Fast Fourier Transform, metode rekursif Panjer, partial loss.

A. Pendahuluan

Seiring dengan beragam dan banyaknya kendaraan bermotor yang beredar telah menimbulkan semakin padatnya kondisi lalu lintas dan risiko yang harus dihadapi oleh manusia juga semakin kompleks. Salah satu hal penting yang patut disadari, dibalik risiko-risiko itu terdapat mekanisme yang canggih. Jika digunakan sebagaimana mestinya maka dapat meringankan kesulitan keuangan yang ditimbulkan. Mekanisme tersebut adalah asuransi. Secara garis besar asuransi terdiri dari dua macam, yaitu asuransi jiwa dan asuransi kerugian. Ada dua jenis perlindungan untuk asuransi kendaraan bermotor, yaitu *Total Loss Only* (TLO) dan *Comprehensive* (Komprehensif). Dalam produk asuransi TLO, jenis klaim diajukan adalah *total loss*. Sedangkan dalam produk asuransi *Comprehensive*, jenis klaim yang diajukan ada dua kemungkinan yaitu, *total loss* dan *partial loss*. Total kerugian yang dialami oleh seorang tertanggung yang harus ditanggung oleh perusahaan asuransi dalam suatu periode waktu tertentu sering disebut sebagai kerugian agregat. Dengan demikian kerugian agregat tergantung pada frekuensi klaim dan besar klaim setiap kali klaim.

Salah satu hal penting dalam menghitung premi asuransi kendaraan bermotor adalah mengetahui distribusi dari kerugian agregat. Secara umum ada dua jenis solusi analitik untuk menentukan distribusi kerugian agregat, yaitu berdasarkan konvolusi dan berdasarkan fungsi karakteristik. Ketika solusi analitik tidak ditemukan, maka digunakan metode yang sifatnya numerik seperti Monte Carlo, *Fast Fourier Transform* (FFT) dan rekursif Panjer. Dalam skripsi ini akan dibahas satu metode yang sifatnya numerik untuk menentukan distribusi kerugian agregat, yaitu metode rekursif Panjer.Metode ini akan diterapkan untuk memodelkan kerugian agregat klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7 (kendaraan bus) di Indonesia.

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, maka masalah yang dapat diidentifikasi adalah:

1. Bagaimana pembahasan dari metode rekursif Panjer untuk menentukan distribusi kerugian agregat tertanggung?
2. Bagaimana mengaplikasikan metode rekursif Panjer untuk menentukan distribusi kerugian agregat tertanggung pada data asuransi kendaraan bermotor di Indonesia?

Selanjutnya tujuan yang akan dicapai dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk membahas metode rekursif Panjer untuk menentukan distribusi kerugian agregat tertanggung.
2. Untuk mengaplikasikan metode rekursif Panjer dalam menentukan distribusi kerugian agregat tertanggung pada data asuransi kendaraan bermotor di Indonesia.

B. Tinjauan Pustaka

Asuransi kendaraan bermotor adalah produk asuransi kerugian yang melindungi tertanggung dari risiko kerugian yang mungkin timbul sehubungan dengan kepemilikan dan pemakaian kendaraan bermotor. Ada dua jenis perlindungan untuk asuransi kendaraan bermotor, yaitu *Total Loss Only* (TLO) dan *Comprehensive* (Komprehenshif).

Tabel 1. Kategori Kendaraan Bermotor

Kategori	Harga Pertanggungan
(1)	(2)
Jenis Kendaraan Non Bus dan Non Truk	
Kategori 1	0 s.d Rp.150.000.000
Kategori 2	Rp.150.000.000.001,00 s.d Rp.300.000.000
Kategori 3	Rp. 300.000.000.001,00 s.d Rp.500.000.000
Kategori 4	Rp. 500.000.000.001,00 s.d s.d Rp.800.000.000
Kategori 5	Lebih dari Rp.800.000.000
Jenis Kendaraan Bus dan Truk	
Kategori 6	Truk, untuk semua uang pertanggungan

Kategori 7	Bus, untuk semua uang pertanggungan
Jenis Kendaraan Roda 2 (dua)	
Kategori 8	Semua uang pertanggungan

Sumber: Peraturan Ketua Bapepam dan LK 2011

Distribusi untuk Frekuensi Klaim

Distribusi Poisson

Peubah acak diskrit K dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ apabila fungsi peluangnya sebagai berikut:

$$P(K = k) = p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \text{untuk } k = 0,1,2,\ldots \tag{2.1}$$

Ekspektasi dan varians dari distribusi Poisson masing-masing adalah:

$E(K) = \lambda$,
$Var(K) = \lambda$.

Distribusi Binomial Negatif

Peubah acak diskrit K dikatakan berdistribusi binomial negatif dengan parameter $r > 0$ dan $\tau > 0$ apabila fungsi peluangnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P(K = k) = p_k &= \binom{k + r - 1}{k}\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^r\left(\frac{1}{1+\tau}\right)^k \\ &= \frac{\Gamma(k + r)}{\Gamma(\mathrm{k}+1)\Gamma(\mathrm{r})}\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^r\left(\frac{1}{1+\tau}\right)^k, \text{untuk } k = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ekspektasi dan varians dari distribusi binomial negatif masaing-masing adalah:

$E(K) = \frac{r}{\tau}$,

$Var(K) = \frac{r}{\tau}\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)$.

Distribusi untuk Besar Klaim

Distribusi Lognormal

Misalkan X merupakan peubah acak yang berdistribusi lognormal dengan fungsi densitas peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \theta}{\sigma}\right)^2\right]; 0 < x < \infty; -\infty < \theta < \infty; \sigma > 0$$

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi lognormal adalah:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \theta}{\sigma}\right); 0 < x < \infty. \tag{2.6}$$

dimana $\Phi(\cdot)$ adalah notasi untuk fungsi distribusi kumulatif normal standar. Ekspektasi dan varians dari distribusi lognormal masing-masing adalah:

$E(X) = \exp\left(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$,
$Var(X) = \exp(2\theta + \sigma^2)\,[\exp(\sigma^2) - 1]$.

Distribusi Eksponensial

Misalkan X merupakan peubah acak yang berdistribusi eksponensial dengan parameter $\beta > 0$, maka fungsi densitas peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}, x > 0, \beta > 0 \quad (2.9)$$

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi eksponensial adalah:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}; x > 0, \beta > 0 \quad (2.10)$$

Ekspektasi dan variansi dari distribusi eksponensial masing-masing adalah:

$E(X) = \beta$,
$Var(X) = \beta^2$.

Uji Kecocokan Distribusi

Uji kecocokan distribusi adalah suatu pengujian hipotesis statistik yang digunakan untuk mengetahui apakah $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah nilai dari sampel acak $X_1, X_2, \cdots, X_n$ yang berdistribusi dengan fungsi distribusi $F(\cdot)$. Uji kecocokan distribusi dapat digunakan untuk menguji hipotesis berikut:

$H_0 : x_1, x_2, \cdots, x_n$ merupakan nilai dari sampel acak yang berdistribusi dengan distribusi $F(\cdot)$.

$H_1 : x_1, x_2, \cdots, x_n$ merupakan nilai dari sampel acak yang berdistribusi dengan distribusi bukan $F(\cdot)$.

Uji Kecocokan Chi-Kuadrat

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}, \quad (2.12)$$

kriteria pengujiannya adalah tolak hipotesis nol jika statistik uji Chi-kuadrat lebih besar dari nilai kuantil distribusi Chi-kuadrat pada taraf nyata α dan derajat bebas $m - r - 1$ atau $\chi^2 \geq \chi^2_{(m-r-1)(1-\alpha)}$.

Uji Anderson-Darling

$$A_n^2 = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i-1}{n}\right) \left[\ln\left(\hat{F}\left(x_{(i)}\right)\right) + \ln\left(1 - \hat{F}\left(x_{(n+1-i)}\right)\right)\right] - n \quad (2.13)$$

Tabel 2. Nilai Kritis untuk Uji Anderson-Darling

Kasus	α		
	0,100	0,050	0,010
Semua parameter diketahui	1,933	2,492	3,857
Lognormal dengan parameter tidak diketahui	1,9286	2,5018	3,9074
Eksponensial dengan parameter tidak diketahui	1,9286	2,5018	3,9074

Sumber: Law dan Kelton (1991) dan *Software EasyFit*

Tolak hipotesis nol jika nilai statistik uji lebih besar dari nilai kritis pada taraf nyata yang ditetapkan.

Model Kerugian Agregat

Misalkan S, menyatakan kerugian agregat, yaitu jumlah dari N pembayaran individu $(X_1, X_2, \cdots, X_N)$. Oleh karenanya,

$$S = (X_1 + X_2 + \cdots + X_N);\text{ untuk } N = 0, 1, 2, \cdots \quad (2.14)$$

dimana $S = 0$, ketika $N = 0$.

Distribusi dari Kerugian Agregat

Peubah acak S yang ada pada Persamaan (2.14) mempunyai fungsi distribusi kumulatif

$$H_s(x) = \Pr(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pr(S \leq x \mid N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x) \quad (2.17)$$

fungsi densitas peluang untuk distribusi kerugian agregat adalah:

$$h_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x). \quad (2.24)$$

Metode Rekursif Panjer

menerapkan metode rekursif Panjer, data besar klaim yang kontinu harus diubah dulu menjadi data diskrit. Misalnya semua nilai besar klaim dapat dibulatkan ke nilai terdekat dikali oleh δ satuan mata uang, misalnya ke nilai Rp. 100.000. Definisikan

$f_X(l) = \Pr(X = l\delta)$, $p_k = \Pr(N = k)$, dan $h_S(l) = \Pr(S = l\delta)$,
dengan $f_X(0) = 0$ dan $l = 0, 1, \cdots$. Kemudian bentuk diskrit dari Persamaan (2.24) adalah:

$$h_S(l) = \sum_{k=1}^{l} p_k f_X^{*k}(l), l \geq 1,$$

$$h_S(0) = \Pr(S = 0) = \Pr(N = 0) = p_0, \quad (2.25)$$

dimana $f_X^{*k}(l) = \sum_{i=0}^{l} f_X^{*(k-1)}(l-1) f_X(i)$ dengan $f_x^{*0}(0) = 1$ dan $f_X^{*0}(l) = 0$ jika $l \geq 1$.

Teorema Rekursif Panjer

$$h_S(0) = \sum_{k=0}^{\infty} {f_X}^k(0) p_k. \quad (2.26)$$

Parameter a dan b, serta nilai awal $h_S(0)$ disajikan dalam Tabel 2.3.

Tabel 3. Nilai Awal dan Parameter untuk Distribusi Kelas Panjer

Distribusi	a	b	$h_s(0)$
Poisson(λ)	0	λ	$exp(\lambda(f_X(0) - 1))$
Binomial Negatif(a, τ)	$\frac{1}{1 + \tau}$	$\frac{(a-1)}{1+\tau}$	$\left[1 + (1 - f_x(0))\frac{1}{\tau}\right]^{-r}$

Algoritme Rekursif Panjer

Diskritisasi dalam Rekursif Panjer

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk diskritisasi distribusi dari besar klaim adalah pendekatan perbedaan pusat (*central difference approximation*), yaitu

$$f_X(0) = F(\delta/2), \quad (2.29)$$
$$f_X(l) = F(l\delta + \delta/2) - F(l\delta - \delta/2), l = 1, 2, \cdots \quad (2.30)$$

Distribusi gabungannya adalah:

$$H_s^U(l) = \sum_{i=0}^{l} h_s^U(i) \; ; H_s^L(l) = \sum_{i=0}^{l} h_s^L(i)$$

C. Hasil dan Pembahasan

Hasil Pengujian Kecocokan Distribusi untuk Frekuensi Klaim

Hipotesis untuk pengujian tersebut adalah:

H_0 : Data frekuensi klaim asuransi kendaraan bermotor berasal dari populasi yang berdistribusi binomial negatif.

H_1 : Data frekuensi klaim asuransi kendaraan bermotor bukan berasal dari populasi yang berdistribusi binomial negatif.

Menghitung taksiran parameter distribusi binomial negatif $(\hat{r})$ dapat dilakukan dengan menggunakan Matlab R2008b, sehingga nilai $\hat{r} = 0{,}1225$ dan taksiran parameter τ dihitung menggunakan Persamaan (2.5), yaitu $\hat{\tau} = \hat{a}/\bar{k} = 0{,}1225/0{,}1107 = 1{,}1061$

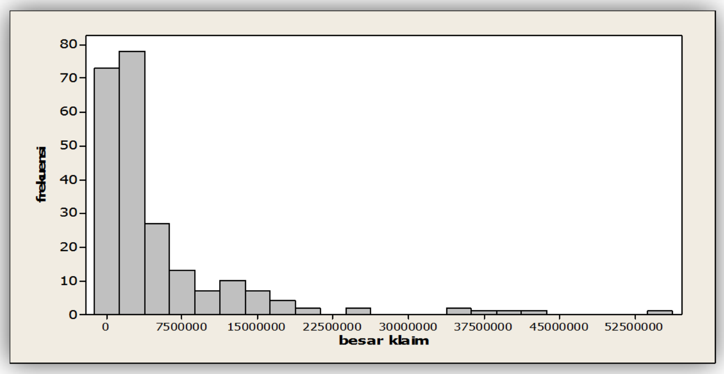
Tabel 4. Nilai-Nilai yang Dibutuhkan untuk Perhitungan Statistik Uji

Frekuensi Klaim (k)	Banyaknya Tertanggung (n_k)	Peluang Terjadinya Klaim (p_k)	Nilai Harapan Terjadinya Klaim (np_k)	$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	1911	0,924142	1.911,1253	0,000008
1	115	0,053752	111,1594	0,1326
2	21	0,014324	29,6226	2,5098
3	15	0,004812	9,9511	2,5616
≥ 4	6	0,00297	6,1415	0,003
Jumlah	2068	1	2068	5,2075

Terlihat bahwa nilai statistik ujinya lebih kecil dibandingkan dengan kuantilnya $(5{,}2075 < 5{,}99)$. Dengan demikian hipotesis nol diterima dan disimpulkan bahwa data frekuensi klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7 di Indonesia berasal dari populasi yang berdistribusi binomial negatif.

Hasil Pengujian Kecocokan Distribusi untuk Besar Klaim

Sebelum melakukan uji kecocokan distribusi besar klaim, dalam bagian ini akan dibuat histogram. Hal ini dilakukan unutk melihat secara visual bentuk dari distribusi besar klaim.



Gambar 1. Histogram Data Besar Klaim

Terlihat bahwa bentuk umum dri distribusi ini menaik kemudian menurun dan selain bentuknya miring kekanan diduga bahwa distribusi dari data besar klaim adalah distribusi lognormal.
Hipotesis untuk pengujian tersebut adalah:

H_0 : Data besar klaim asuransi kendaraan bermotor berasal dari populasi yang berdistribusi lognormal.

H_1 : Data besar klaim asuransi kendaraan bermotor bukan berasal dari populasi yang berdistribusi lognormal.

$$A_n^2 = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{n}\right)\left[\ln\left(\hat{F}\left(x_{(1)}\right)\right) + \ln\left(1-\hat{F}\left(x_{(n+1-i)}\right)\right)\right] - n$$

$$= -(-229{,}2454) - 229 = 0{,}2452.$$

Dari hasil perhitungan diperoleh nilai statistik uji Anderson-Darling yaitu $A_n^2 = 0{,}2452$. Dengan taraf nyatanya $\alpha = 5\%$, nilai kritisnya adalah 2,5018. Terlihat bahwa nilai statistik uji Anderson-Darling diatas lebih kecil dibandingkan dengan nilai kritisnya, sehingga hipotesis nol diterima dan disimpulkan bahwa data besar klaim tertanggung asuransi kendaraan bermotor di Indonesia kategori 7 berasal populasi yang berdistribusi lognormal.

Hasil Rekursif Panjer

Tabel 5. Nilai Fungsi Densitas dan Nilai Fungsi Distribusi Kumulatif

l	$s = l\delta$	$f_X(l)$	$h_S(l)$	$H_S(l)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	0,001111	0,924202	0,924202
1	100.000	0,013323	0,000715	0,924917
2	200.000	0,023153	0,001246	0,926163
3	300.000	0,027671	0,001495	0,927658
4	400.000	0,029434	0,0016	0,929258
5	500.000	0,029769	0,001629	0,930887
6	600.000	0,029344	0,001619	0,932507
7	700.000	0,028515	0,001588	0,934094
8	800.000	0,027479	0,001544	0,935639
9	900.000	0,026348	0,001496	0,937134

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
229	229.000.000	0,00027	3,80E-05	0,994802
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
511	511.000.000	3,11E-05	4,77E-06	0,998942
512	512.000.000	3,09E-05	4,74E-06	0,998947
513	513.000.000	3,07E-05	4,72E-06	0,998952

Daftar Pustaka

Ali, H. (1993). *Pengantar Asuransi*, Bumi Aksara, Jakarta.

Kementerian Keuangan Republik Indonesia Badan Pengawasan Pasar Modal dan Lembaga Keuangan (2011). Peraturan Ketua Badan Pengawasan Pasar Modal dan Lembaga Keuangan Nomor: PER-04/BL/2011.

Kitab Undang-Undang Hukum Dagang (KUHD), Bab IX Tentang Asuransi atau Pertanggungan pada Umumnya, Pasal 246.

Klugman, S. A., Panjer, H. H., dan Wilmot, G. (2004). *Loss Models. From Data to Decisions*. Willey-Interscience, New York.

Law, A. M., dan Kelton, W. D. (1991). *Simulation Modeling and Analysis*. Edisi Kedua. McGraw-Hill Inc., New York.

Republik Indonesia (2007). Peraturan Menteri Keuangan Nomor 74/PMK.010/2007, Pasal 1 Ayat (2), Jakarta.

Shevhenko, P. V. (2010). Calculation of Aggergate Loss Distributions. *The Journal of Operational Risk* , Vol. 5, No. 2, 3-40.

Surahman, A. (1993). *Analisis Statistika & Probabilitas*, ITB, Bandung.

Walpole, R. E., dan Myers, R. H. (1995). *Pengantar Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan*, Bandung, ITB