Analisis Data Sepak Bola Indonesia Super League 2014 dengan Distribusi Poisson

Data Analysis of Football Indonesia Super League 2014 with Poisson Distribution

[1]Bayu Dwi Purnama, [2] Siti Sunendiari, [3]Suwanda

[1,2,3]Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

email: [1]bpurnama43@gmail.com

Abstract. In a football game scoring to the opponent is a thing that should be done by every football team in order to win the game. Goals scored by each team football or conceded a goal can illustrate the power of attack and strength endure every team. This paper applies the poisson model to describe the strength of the attack and the weaknesses persist at every football team while playing at every home and away Football League system.Poisson model can be used by the football spectators to see the power of the strike and the strength of his team survive at a time when playing an away or enclosure. In this paper to illustrate the strength of each team attacking at the moment playing cage symbolized by α, then β denoted to illustrate the weaknesses persist at the time of each team playing away. For the weaknesses persist at the time each team play cage symbolized by γ, and the strength of each team attacked at the time away playing denoted by δ. The value of maximum likelihood estimates (MLE) ofthePoissondistribution isusedto getthevalueofthese parameters ,then the parameters value to use itersari exemplified by Maher (1982). Poisson model to get the strength to attack and strength endure every team on the playing enclosure or the amount of data needed away to score each of their games. In this paper the data used is data Indonesia Super League (ISL) in 2014. The result of the calculation of the value of the MLE are obtained Arema Cronus has the highest 2.0529 of α, β and value most highly owned by Club Persijap Jepara with a value of 2.5029. For most high γ value owned by the Club PersibaBantul with a value of 2.6543, then to the highest δ values owned by the Club Arema Cronus with a value of 1.9871.

Keywords: Poisson Distribution, Indonesia Super League (ISL)

Abstrak.. Dalam pertandingan sepak bola mencetak gol ke gawang lawan merupakan sebuah hal yang harus dilakukan oleh setiap tim sepak bola agar memenangkan pertandingan. Gol yang dicetak oleh setiap tim sepak bola atau kemasukan gol dapat menggambarkan kekuatan menyerang dan kekuatan bertahan setiap tim. Makalah ini menerapkan model poisson untuk menggambarkan kekuatan menyerang dan kelemahan bertahan pada setiap tim sepak bola saat bermain kandang dan tandang pada setiap kompetisi sepak bola bersistem liga. Model poisson dapat digunakan oleh penonton sepak bola untuk melihat kekuatan menyerang dan kekuatan bertahan tim kesayangannya pada saat bermain kandang atau tandang. Dalam makalah ini untuk menggambarkan kekuatan menyerang setiap tim pada saat bermain kandang dilambangkan oleh α, kemudian β dilambangkan untuk menggambarkan kelemahan bertahan setiap tim pada saat bermain tandang. Untuk kelemahan bertahan setiap tim pada saat bermain kandang dilambangkan oleh γ, dan kekuatan menyerang setiap tim pada saat bermain tandang dilambangkan oleh δ. Nilai maximum likelihood estimates (MLE) dari distribusi Poisson akan digunakan untuk mendapatkan nilai parameter-parameter tersebut, kemudian untuk mendapatakan nilai parameter tersebut menggunakan teknik itersari yang dicontohkan oleh Maher (1982). Untuk mendapatkan model poisson yang menggambarkan kekuatan menyerang dan kekuatan bertahan setiap tim pada saat bermain kandang atau tandang diperlukan data jumlah skor setiap pertandingannya. Dalam makalah ini data yang digunakan adalah data *Indonesia Super League* (ISL) tahun 2014. Hasil dari perhitungan nilai MLE didapatkan Arema Cronus memiliki nilai α paling tinggi sebesar 2,0529, dan nilai β paling tinggi dimiliki oleh klub Persijap Jepara dengan nilai 2,5029. Untuk nilai γ paling tinggi dimiliki oleh klub Persiba Bantul dengan nilai 2,6543, kemudian untuk nilai δ paling tinggi dimiliki oleh klub Arema Cronus dengan nilai 1,9871.

Kata kunci: Distribusi Poisson, Indonesia Super League (ISL)

A. Pendahuluan

Distribusi poisson telah banyak digunakan secara luas sebagai pendekatan model sederhana untuk distribusi jumlah gol pada olahraga yang melibatkan dua tim yang bersaing. (Karllis dan Ntzoufras, 2000) mengatakan penelitian dalam statistik sepak bola dapat dibagi dalam tiga kategori. Kategori pertama model hasil dari pertandingan, kategori kedua menyelidiki model prediksi jumlah gol dari masing-masing tim. Kategori ketiga berkonsentrasi dalam pemodelan karakteristik lain dari pertandingan.

Skripsi ini akan lebih condong mengupas statistik sepak bola kategori ketiga yang memodelkan karakteristik lain dari pertandingan dengan menggambarkan kekuatan menyerang pada saat bermain kandang dan tandang, selain itu model ini menggambarkan kelemahan bertahan pada saat bermain kandang dan juga tandang. Seperti dalam Maher (1982) yang memodelkan karakteristik dalam pertandingan sepak bola dengan mengusulkan model poisson independen. Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka perumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana menerapkan distribusi poisson dalam data pertandingan sepak bola bersistem liga?
2. Bagaimana mengetahui kekuatan bertahan dan menyerang setiap tim bermain kandang dan tandang pada pertandingan sepak bola ISL 2014?

Selanjutnya, tujuan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut:

1. Untuk menerapkan distribusi poisson dalam data pertandingan sepak bola bersistem liga.
2. Untuk mengetahui kekuatan bertahan dan menyerang setiap tim bermain kandang dan tandang pada pertandingan sepak bola ISL 2014.

B. Landasan Teori

Distribusi Diskrit

Distribusi diskrit hanya dapat bernilai tertentu ciri-ciri utamanya adalah, jumlah total peluangnya sama dengan 1, peluang dari suatu hasil adalah antara 0 sampai 1, hasilnya tidak terikat satu sama lain. Distribusi diskrit antara lain dari distribusi bernoulli, distribusi binomial, dan distribusi poisson.

Distribusi Bernoulli

Apabila sebuah eksperimen mempunyai dua hasil yang muncul, seperti “sukses” dan “gagal”, dengan masing-masing peluangnya θ dan (1-θ), maka peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal akan berdistribusi bernoulli.

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi Bernoulli adalah, $X \sim B(1,\theta)$, artinya peubah acak X berdistribusi Bernoulli dengan peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal dinyatakan dengan x, banyak eksperimen yang dilakukan satu kali, dan peluang terjadinya peristiwa yang diperhatikan baik sukses maupun gagal sebesar θ.

Fungsi densitas Bernoulli

$$p(x) = P(X = x) = \theta^{x} (1-\theta)^{1-x} \; ; x = 0, 1$$

Rataan untuk fungsi distribusi Bernoulli

$$E(x) = \theta$$

Varians untuk fungsi distribusi Bernoulli

$$V(x) = \theta(1-\theta)$$

Fungsi pembangkit momen untuk distribusi Bernoulli

$M_x(t) = [(1-\theta)+\theta e^t]; t \in R$

Distribusi Binomial

Suatu eksperimen yang hanya menghasilkan dua peristiwa, seperti peristiwa sukses (*S*) dan peristiwa gagal (*G*). Peluang terjadinya peristiwa *S*, adalah *P*(*S*), sebesar θ dan peluang terjadinya peristiwa *G*, *P*(*G*), sebesar *1-θ*. Eksperimen itu diulang sebanyak *n* kali secara bebas. Dari *n* kali pengulangan itu, peristiwa *S* sebanyak *x* kali dan sisanya (*n-x*) kali terjadi peristiwa *G*. Penulisan notasi dari peubah acak *X* yang berdistribusi Binomial adalah *X~B(n,θ*), artinya peubah acak *X* berdistribusi Binomial dengan banyak pengulangan eksperimen sebanyak *n* kali, peluang terjadi peristiwa sukses sebesar θ, dan banyak peristiwa sukses terjadi ada *x*.

Fungsi densitas distribusi Binomial

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x}\theta^x (1-\theta)^{n-x};\ x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

Rataan untuk distribusi Binomial

$E(x) = n\theta$

Varians untuk distribusi Binomial

$V(x) = n\theta(1-\theta)$

Fungsi pembangkit momen untuk distribusi Binomial

$M_x(t) = \left[(1-\theta)+\theta e^t\right]^n; t \in R$

Distribusi Poisson

Distribusi Poisson adalah distribusi probabilitas diskrit yang menyatakan peluang jumlah peristiwa yang terjadi pada periode waktu tertentu apabila rata-rata kejadian tersebut diketahui dan dalam waktu yang saling bebas sejak kejadian terakhir. Distribusi Poisson juga dapat digunakan untuk jumlah kejadian pada interval tertentu seperti jarak, luas, atau volume.

Distribusi Poisson diperoleh dari distribusi Binomial, dengan syarat-syarat sebagai berikut.

1. Banyak pengulangan eksperimennya sangat besar $(n \to \infty)$.
2. Peluang terjadinya peristiwa yang diperhatikan mendekati nol $(\theta \to 0)$.
3. Perkalian $n \cdot \theta = \lambda$, sehingga $\theta = \frac{\lambda}{n}$.

Peubah acak diskrit *X* dikatakan berdistribusi Poisson dengan fungsi densitasnya sebagai berikut:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad \text{untuk } x = 0,1,2,..$$

Rataan untuk distribusi Poisson

$E(x) = \lambda$

Varians untuk distribusi Poisson

$V(x) = \lambda$

Fungsi pembangkit momen untuk distribusi Poisson

$M_x(t) = e^{\lambda(e^t-1)}; t \in R$

Distribusi Prediksi Poisson Independent

Model Poisson independen untuk mendapatkan nilai kekuatan setiap tim. Secara khusus, *i* dinotasikan untuk tim yang bermain kandang, dan *j* dinotasikan untuk tim yang bermain tandang. Dalam distribusi ini terdapat dua peubah, yaitu X_{ij} dan Y_{ij}. Dalam peubah X_{ij} memiliki parameter α_i dan β_j, dimana α_i diasumsikan sebagai kekuatan menyerang tim *i* kandang, dan β_j diasumsikan sebagai kelemahan dalam bertahan tim *j* saat bermain tandang. X_{ij} merupakan jumlah gol tim i saat bermain kandang melawan tim *j*. Kemudian dalam peubah acak Y_{ij} memiliki parameter γ_i dan δ_j , dimana γ_i diasumsikan sebagai kelemahan bertahan tim *i* saat bermain di kandang, dan δ_j diasumsikan sebagai kekuatan menyerang tim *j* saat bermain tandang. Y_{ij} merupakan jumlah gol tim saat *j* saat bermain tandang melawan tim *i* dalam (Maher, 1982). Di dalam ISL 2014 terdapat 22 tim yang berlaga, yang terdiri dari 11 tim wilayah barat dan 11 tim dari wilayah timur.

Dengan jumlah tim masing-masing wilayah sebanyak 11, maka setiap wilayah barat dan wilayah timur memiliki 220 skor yang diamati. Apabila digabungkan maka pada ISL 2014 terdapat 440 pengamatan skor. Kemudian untuk distribusi banyaknya gol fungsi peluangnya adalah sebagai berikut:

$$p(x) = \frac{e^{-\alpha\beta}(\alpha\beta)^x}{x!} \qquad ; x = 0,1,\ldots, n \tag{2.2}$$

Fungsi *likelihood* untuk skor tim kandang

$$L(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \prod_{i}^{20} \prod_{j \neq i}^{20} \left(\frac{e^{-\alpha_i\beta_j}\left(\alpha_i\beta_j\right)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \right)$$

Fungsi log *likelihood* untuk skor tim kandang

$$\log\ L\left(\underline{\alpha}\ \underline{\beta}\right) = \sum_{i}^{20} \sum_{j \neq i}^{20} \left(-\alpha_i\beta_j + x_{ij}\log\left(\alpha_i\beta_j\right) - \log\left(x_{ij}!\right)\right)$$

Kemudian turunan terhadap α_i

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha_i} = \sum_{j \neq i}^{20} \left(-\beta_j + x_{ij}\frac{\beta_j}{\alpha_i\beta_j} \right)$$

$$= \sum_{j \neq i}^{20} \left(-\beta_j + \frac{x_{ij}}{\alpha_i} \right)$$

Maka maximum likelihood estimates α dan β adalah :

$$\alpha = \frac{\sum_{j \neq i} x_{ij}}{\sum_{j \neq i} \hat{\beta}_j} \quad \text{dan} \quad \beta = \frac{\sum_{i \neq j} x_{ij}}{\sum_{i \neq j} \hat{\alpha}_i} \tag{2.3}$$

Dalam cara yang sama untuk peubah *Yij* diperoleh parameter untuk γ_i dan δ_j adalah

$$\gamma = \frac{\sum_{j \neq i} y_{ij}}{\sum_{j \neq i} \hat{\delta}_j} \quad \text{dan} \quad \delta = \frac{\sum_{i \neq j} y_{ij}}{\sum_{i \neq j} \hat{\gamma i}} \tag{2.4}$$

Dalam skripsi ini akan menggunakan teknik iterasi, untuk mendapatkan nilai *maximum likelihood.* Untuk mendapatkan nilai $\hat{\alpha}$ kita membutuhkan penaksir $\hat{\beta}$ dan kemudian untuk mendapatkan nilai $\hat{\beta}$ kita membutuhkan penaksir $\hat{\alpha}$, dan begitu juga untuk penaksir *Y*. Untuk mendapatkan nilai awal yang baik dapat diperoleh dengan rumus penjumlahan semua tim sebagai berikut:

$$\hat{\alpha}_i = \sum_{j \neq i} x_{ij} / \sqrt{s_x} \quad dan \quad \hat{\beta}_j = \sum_{i \neq j} x_{ij} / \sqrt{s_x}, \quad \text{dimana} \quad s_x = \sum_i \sum_{j \neq i} x_{ij} \tag{2.5}$$

Persamaan (2.4) diatas adalah untuk mendapatkan nilai awal pada peubah acak Xij, kemudian untuk mendapatkan nilai awal pada peubah acak Yij adalah sebagai berikut:

$$\hat{\gamma}_i = \sum_{j \neq i} y_{ij} / \sqrt{s_y} \quad dan \quad \hat{\delta}_j = \sum_{i \neq j} y_{ij} / \sqrt{s_y}, \quad \text{dimana} \quad s_y = \sum_i \sum_{j \neq i} y_{ij} \tag{2.6}$$

Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson adalah metode pencarian akar suatu fungsi f(x) dengan pendekatan satu titik, dimana fungsi f(x) mempunyai turunan. Metode ini dianggap lebih mudah dari Metode Bagi-Dua (Bisection Method) karena metode ini menggunakan pendekatan satu titik sebagai titik awal. Semakin dekat titik awal yang kita pilih dengan akar sebenarnya, maka semakin cepat konvergen ke akarnya.

Dalam skripsi ini akan menggunakan metode iterasi yang diajukan oleh M. J. Maher, metode yang diajukan oleh Maher ini lebih mudah dari metode iterasi Newton Raphson. Kemudian untuk mendapatkan nilai jarak dari setiap peubah acak dengan menggunakan cara sebagai berikut:

$$Jarak = \sqrt{\left(\alpha_1^0 - \alpha_1^1\right) + \cdots + \left(\alpha_n^0 - \alpha_n^1\right) + \left(\beta_1^0 - \beta_1^1\right) + \cdots + \left(\beta_n^0 - \beta_n^1\right)} \tag{2.7}$$

Cara yang sama juga untuk menghitung jarak peubah acak Y_{ij}, hitung kedua iterasi yang berdekatan hingga konvergen.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Hasil Nilai Awal untuk Parameter

Berikut ini akan dilakukan perhitungan mencari nilai awal parameter fungsi distribusi banyaknya gol, dengan berdasarkan pada Persamaan (2.5) dan Persamaan (2.6). Perhitungan nilai awal ini untuk menaksir parameter-parameter di iterasi berikutnya, pada Persamaan (2.5) untuk mencari nilai awal untuk peubah acak X_{ij} dan pada Persamaan (2.6) untuk mencari nilai awal untuk peubah acak Y_{ij}. Nilai awal parameter ISL 2014 wilayah barat untuk peubah acak Xij adalah sebagai berikut:

$$\hat{\alpha}_1 = \sum_{j \neq 1}^{11} x_{1j} / S_x \quad \text{dimana} \quad s_x = \sum_i \sum_{j \neq i} x_{ij}$$

$$\hat{\alpha}_1 = 27 / \sqrt{185} = 1{,}985079$$

Untuk mendapatkan nilai awal $\hat{\alpha}_1$ wilayah barat caranya seperti diatas,kemudian untuk mendapatkan nilai $\hat{\beta}_1$ wilayah barat adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{i \neq 1}^{11} x_{i\,1} / \sqrt{s_x}$$

$$\hat{\beta}_1 = 6 / \sqrt{185} = 0{,}441129$$

Cara yang sama juga untuk mendapatkan nilai awal γ dan δ.

Hasil Nilai Maximum Likelihood Estimates

Setelah diketahui nilai awal untuk menaksir parameter α, β, γ, dan δ, langkah selanjutnya adalah mencari nilai Maximum Likelihood Estimates (MLE). Untuk mendapatkan nilai MLE pada peubah acak Xij menggunakan Persamaan (2.3), sedangkan untuk mendapatkan nilai MLE pada peubah acak Yij menggunakan Persamaan (2.4). Nilai parameter ISL 2014 wilayah barat untuk peubah acak Xij adalah sebagai berikut:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{j \neq 1} x_{1j}}{\sum_{j \neq 1} \hat{\beta}_j}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{27}{1.6175 + 0.9558 + \cdots + 1.2499}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{27}{13.1603} = 2.0516$$

Parameter $\hat{\alpha}_1$ diperoleh nilai 2.0516 yang ditaksir menggunakan nilai awal parameter $\hat{\beta}$, cara yang sama juga untuk mendapatkan nilai $\hat{\beta}_1$ yaitu dengan menaksir menggunakan nilai awal parameter $\hat{\alpha}$. Untuk mendapatkan nilai $\hat{\beta}_1$ caranya sebagai berikut

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i \neq j} x_{i1}}{\sum_{i \neq 1} \hat{\alpha}_i}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{6}{0.8823 + 1.2499 + \cdots + 1.1763}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{6}{11.6164} = 0.5165$$

Cara yang sama untuk mendapatkan nilai *maximum likelihood estimates* dari γ dan δ.

Hasil Nilai Iterasi

Setelah diketahui nilai awal dari parameter-parameter α, β, γ, dan δ, kemudian nilai parameter dari MLE juga sudah diketahui selanjutnya menghitung nilai jarak hingga konvergen. Jika nilai jarak belum konvergen, maka hitung kembali nilai parameter dari MLE, kemudian hitung kembali hingga nilai jaraknya konvergen atau memiliki nilai galat terkecil. Pada skripsi ini menggunakan Matlab untuk membantu perhitungan iterasi. Perhitungan iterasi terus berulang hingga iterasi ke enam, pada iterasi ke enam nilai jarak sudah konvergen atau memiliki nilai galat yang kecil. Kemudian pada bagian ini akan disajikan nilai-nilai parameter dari peubah acak X_{ij} dan Y_{ij} dari wilayah barat dan wilayah timur, nilai-nilai parameter tersebut akan disajikan dalam **Tabel 1** dan **Tabel 2**

Tabel 1. Nilai Maximum Likelihood Estimates parameter ISL 2014 Wilayah Barat

NO	NAMA KLUB	α	β	γ	Δ
1	Arema Cronus	2,0529	0,4697	0,7834	1,9871
2	Barito Putera	0,9974	1,5908	0,9074	1,0048
3	Pelita Bandung Raya	1,3431	0,9641	0,8210	1,1782
4	Persegres Gresik United	1,2422	1,5458	1,0516	0,4628
5	Persib Bandung	1,8791	0,8496	0,9710	1,6538
6	Persija Jakarta	1,0858	0,7277	0,5114	1,1460
7	Persijap Jepara	0,4497	2,5039	1,8404	0,5991
8	Persik Kediri	2,1165	1,8095	1,2327	0,3766
9	Persita Tanggerang	1,1175	1,0941	1,9578	0,7073
10	Semen Padang	1,2489	0,8101	0,6200	1,2461
11	Sriwijaya	1,2939	1,2562	1,1581	0,5609

Tabel 2. Nilai Maximum Likelihood Estimates parameter ISL 2014 Wilayah Timur

NO	NAMA KLUB	α	β	γ	δ
1	Mitra Kukar	1,8683	0,8390	0,7523	0,9622
2	Persebaya Surabaya	1,9894	0,6159	0,5973	1,8961
3	Persela Lamongan	1,6835	1,8051	0,9492	0,7846
4	Persepam Madura United	1,4933	1,6314	1,4070	1,0269
5	Perseru Serui	0,9849	1,5006	0,8518	0,8744
6	Persiba Balikpapan	0,8969	1,4202	0,7523	0,9622
7	Persiba Bantul	1,1074	1,9464	2,6543	0,4711
8	Persipura Jayapura	1,3050	0,6582	0,6577	1,1442
9	Persiram Raja Ampat	0,8715	1,0633	0,6188	0,5700
10	PSM Makasar	0,9566	1,1410	1,0784	0,9934
11	Putra Samarinda	1,8223	1,0641	0,8260	0,5814

Secara keseluruhan wilayah pada ISL 2014 klub Arema Cronus memiliki nilai α paling tinggi dengan nilai 2.0529, artinya klub Arema Cronus memiliki kekuatan penyerangan paling kuat saat bermain kandang. Nilai β paling tinggi pada ISL 2014 dimiliki oleh klub Persijap Jepara dengan nilai 2.5029, artinya klub Persijap Jepara paling memiliki kelemahan bertahan pada saat bermain tandang. Kemudian untuk nilai γ paling tinggi pada ISL 2014 dimiliki oleh klub Persiba Bantul dengan nilai 2.6543, artinya klub Persiba Bantul paling memiliki kelemahan bertahan pada saat bermain kandang. Nilai δ paling tinggi dimiliki oleh klub Arema Cronus dengan nilai 1.9871, artinya klub Arema Cronus paling memiliki kekuatan menyerang paling tinggi pada saat bermain tandang.

D. Kesimpulan

Ada beberapa kesimpulan dalam penelitian ini yaitu:

1. Skor hasil pertandingan saat bermain kandang dan tandang masing-masing tim dalam sebuah liga dapat digunakan untuk mengukur kekuatan menyerang kandang (α), kelemahan bertahan tandang (β), kelemahan bertahan kandang (γ), dan kekuatan menyerang tandang (δ)

2. Parameter α dan β termuat pada skor saat kandang dan γ dan δ pada skor tandang.
3. Untuk menaksir parameter-parameter α, β, γ, dan δ diasumsikan berdistribusi Poisson saling bebas.
4. Solusi maximum likelihood estimates menggunakan teknik iterasi yang dicontohkan oleh Maher karena tidak eksplisit.
5. Implementasi Indonesia Super League 2014 dari 11 tim wilayah barat dan 11 tim wilayah timur menunjukan hasil.

E. Saran

1. Analisis diatas bisa diasumsikan dengan Poisson yang tidak bebas.
2. Hasil diatas bisa digunakan untuk liga berikutnya dengan komposisi pemain sama dengan musim sebelumnya.
3. Hasil penaksiran parameter bisa digunakan untuk strategi masing-masing tim pada setiap pertandingan .

Daftar Pustaka

Karlis, D dan Ntzoufras, I. (2000). On Modelling Soccer Data. Department of Statistics, Athens University of Economics and Business, Greece

Giulianotti, R. C. (2016). Football, dilihat dari Britannica website: https://www.britannica.com/sports/football-soccer/Play-of-the-game .

Hogg. R. V. dan Craig. A. T. (1978). Introduction to Mathematical Statistics. 5th Editon. Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Maher, M.J (1982). Modelling Association Football Scores. Department of Probability and Statistics, Sheffield University, Sheffield S3 7RH, England. Statistica Neerlandica 36 (1982), nr. 3.

PT. Liga Indonesia. (2014). Hasil Pertandingan Indonesia Super League 2014, dilihat dari Liga Indonesia website: http://ligaindonesia.co.id/index.php/read/isl/Inilah-Pembagian-Wilayah-ISL-2014-5637#.WFAt3NKLTMy .

Tampubolon, M., dan Karami, L. R. (2011). Sejarah Kompetisi Sepak Bola Indonesia, dilihat dari Viva Bola website: http://www.viva.co.id/bola/read/243398-sejarah-kompetisi-sepak-bola-indonesia .

Varberg., Purcell., dan Rigdon. (2010). Kalkulus. Edisi Kesembilan. Erlangga. Jakarta. .