Penduga Rasio Odds pada Kasus Kejadian Jarang dengan Metode Penduga Kemungkinan Maksimum Termodifikasi dan Penduga Median Takbias Termodifikasi

Odds Ratios Estimation in Rare Events with Modified Maximum Likelihood Estimation and Modified Median Unbiased Estimation Method

[1]Asep Andri Fauzi, [2]Abdul Kudus, [3]Lisnur Wachidah

[1,2,3]Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

email: [1]asepandrif@gmail.com, [2]akudus69@yahoo.com, [3]lisnur_w@yahoo.com

Abstract. The odds ratio is widely used to compute a measure of association between two independent samples. Maximum Likelihood Estimation (MLE) is a usual estimator for odds ratio. However, MLE has the disadvantage when dealing with rare events. Morover, if the number of success is equal to zero, then odds ratio with MLE not laid between 0 and infinite. This paper discussed about a methods for odds ratios estimation in rare events such as, Modified Maximum Likelihood Estimator (MMLE) and Modified Median Unbiased Estimator (MMUE) method. Simulation with 5.000 replications is used to evaluate efficiency of methods with Estimated Relative Error as a criterion. Then, the most efficient method is used in real data about influence of *Therapeutic Exercise Walking* on quality of sleep of client Chronic Obstructive Lung Desease. Evaluation showed that MMLE is rather well than MMUE with contains 53% smallest ERE. Odds ratio of sleep quality with MMLE is 22,73.

Keywords: Odds Ratio, Rare Events, MMLE, MMUE, ERE.

Abstrak. Rasio odds sering digunakan untuk mengukur asosiasi antara dua sampel yang saling bebas. Penduga Kemungkinan Maksimum (PKM) lazim digunakan dalam menduga harga rasio odds. Akan tetapi, PKM memiliki kelemahan apabila dihadapkan pada persoalan kejadian jarang. Lebih lagi, jika jumlah kejadian sukses pada salah satu kelompok sama dengan nol, maka dugaan bagi rasio odds tidak berada pada rentang 0 dan takhingga. Makalah ini membahas metode penduga rasio odds pada kasus dengan kejadian jarang, yakni metode Penduga Kemungkinan Maksimum Termodifikasi (PKMT) dan Penduga Median Takbias Termodifikasi (PMTT). Untuk mengevalusi efisiensi dari kedua metode tersebut dilakukan simulasi sebanyak 5.000 kali ulangan dengan menggunakan kriteria *Estimated Relative Error* (ERE). Kemudian, metode terefisien digunakan untuk menghitung rasio odds hasil penelitian Flowerenty (2015) tentang pengaruh *Therapeutic Exercise Walking* terhadap kualitas tidur klien Penyakit Paru Obstruktif Kronis. Hasil evaluasi menunjukkan Metode PKMT memiliki efisiensi yang sedikit lebih baik yaitu dengan ERE terkecil sebanyak 53%. Rasio odds kualitas tidur dengan Metode PKMT yaitu 22,73.

Kata Kunci: Rasio Odds, Kejadian Jarang, PKMT, PMTT, ERE.

A. Pendahuluan

Odds (Ω) merupakan ukuran perbandingan antara peluang munculnya suatu kejadian (π) dan tidak munculnya kejadian tersebut $(1-\pi)$ (Saefuddin, 2009). Apabila ada dua odds, Ω_1 dan Ω_2, yang diperbandingkan, maka akan diperoleh rasio odds. Rasio odds (θ) merupakan ukuran asosiasi antara dua sampel saling bebas yang dapat terdiri dari dua kelompok perlakuan, dua kelompok kontrol atau kelompok perlakuan dan kontrol. Setiap kelompok memiliki respon kategorik dengan dua kemungkinan hasil (*outcome*) yaitu, sukses dan gagal, dan dapat diperlakukan sebagai peubah berdistribusi binomial. Data untuk menghitung rasio odds dapat ditampilkan dalam tabel kontingensi berukuran 2×2, seperti pada Tabel 1.

Rasio odds berharga riil nonnegatif, $0 < \theta < \infty$. Jika θ semakin jauh dari 1, maka asosiasi antara dua sampel semakin erat. Ukuran keeratan dua rasio odds, θ_1 dan θ_2, adalah sama saat $\theta_1 = 1/\theta_2$, tetapi berbeda arah pola hubunganya. Rasio odds sering digunakan dalam penelitian tentang kesehatan, seperti pada bidang epidemiologi untuk menyelidiki pengaruh percobaan klinis (Raweesawat, 2016).

Tabel 1. Tabel Kontingensi 2×2 untuk Penyajian Data

Kelompok	Hasil		Total
	Sukses	**Gagal**	
1	Y_1	$n_1 - Y_1$	n_1
2	Y_2	$n_2 - Y_2$	n_2
Total	$Y_1 + Y_2$	$(n_1 - Y_1) + (n_2 - Y_2)$	

Dalam penelitian epidemiologi, kerap muncul kejadian jarang (*rare events*). Istilah kejadian jarang berkaitan dengan kejadian yang jarang terjadi. Oleh sebab itu, kejadian jarang merupakan kondisi yang ditandai dengan jumlah sukses yang sangat sedikit atau sangat banyak pada suatu kelompok. Namun, makalah ini hanya membahas kejadian jarang dengan jumlah sukses yang sangat sedikit.

Metode Penduga Kemungkinan Maksimum (PKM) lazim digunakan untuk menghitung penduga rasio odds $(\hat{\theta})$. Rasio odds memiliki sebaran sampel yang sangat menceng. Selain itu, PKM memiliki kelemahan saat berhadapan dengan kejadian jarang yakni, galat baku menjadi lebih besar sehingga penduga selang kepercayaan menjadi kurang presisi (Raweesawat, 2016), dan jika ada jumlah sukses pada kelompok 1 atau 2 atau keduanya sama dengan nol $(Y_t = 0; t = 1{,}2)$ maka rasio odds akan berharga nol $(\hat{\theta} = 0)$, takhingga $(\hat{\theta} = \infty)$, atau tidak terdefinisi $(\hat{\theta} = tdf)$. Untuk mengatasi masalah tersebut, dapat digunakan dua metode yaitu, Metode Penduga Kemungkinan Maksimum Termodifikasi (PKMT) dan Kemungkinan Median Takbias Termodifikasi (PMTT).

Metode PKMT yang diajukan oleh Haldane (1955) serta Gart dan Zweifel (1967) perhitungannya mirip dengan PKM tetapi saat ada jumlah sukses sama dengan nol, maka setiap sel tabel kontingensi ditambah dengan 0,5. Dengan menggunakan PKMT penduga rasio odds selalu berada pada selang 0 dan ∞ $(0 < \hat{\theta} < \infty)$. Penduga rasio odds Metode PKMT $(\hat{\theta}_{PKMT})$ memiliki sifat asimtotik yang sama dengan penduga rasio Metode PKM $(\hat{\theta}_{PKM})$, yakni konsisten, secara keseluruhan asimtotik efisien, dan berdistribusi asimtotik normal dengan rata-rata sama dengan harga rasio odds sebenarnya (Parzen, dkk. 2002). Agresti dan Yang (1987) tidak berani memasukkan 0,5 pada setiap sel karena seperti memasukkan “data palsu”. Saat $Y_1 = Y_2 = 0$, maka harga rasio odds hanya dipengaruhi oleh jumlah pengamatan setiap kelompok $(n_t; t = 1{,}2)$, sehingga tidak lagi merepresentasikan perbandingan antara Ω_1 dan Ω_2.

Parzen, dkk. (2002) mengusulkan metode PMTT berlandaskan pada Metode Penduga Median Takbias (PMT) yang diusulkan oleh Hirji, dkk. (1989). Penduga peluang sukses $(\tilde{p}_t; t = 1, 2)$ dengan Metode PMT selalu berada pada selang 0 dan 1 $(0 < \tilde{p}_t < 1)$ meskipun $Y_t = 0$ atau $Y_t = n_t$. Sehingga rasio odds PMTT $(\hat{\theta}_{PMTT})$ selalu terletak pada [0,∞]. Parzen, dkk. (2002) menggunakan dua sebaran binomial untuk menghitung PMT dari dua peluang kejadian sukses, berbeda dengan Hirji, dkk. (1989) yang menggunakan sebaran kondisional nonsentral hipergeometrik untuk memperoleh PMT dari rasio odds. Parzen, dkk. (2002) juga menunjukkan PMTT merupakan penduga yang konsisten, sepenuhnya efisien secara asimtotik, berdistribusi normal asimtotik, dan takbias. Metode PMTT merupakan alternatif bagi metode PKM tanpa perlu menyertakan “data palsu”.

Baik metode PKMT maupun PMTT keduanya memiliki tujuan sama. Oleh karena itu, sebaiknya dipilih salah satu metode. Pemilihan metode dapat menggunakan kriteria efisien. Metode terefisien akan dipilih karena harga penduga mendekati harga sebenarnya (*exact value*). Menurut Raweesawat, dkk. (2016), untuk mengukur efisiensi metode dapat menggunakan *Estimated Relative Error* (ERE).

Skripsi ini membahas Metode PKMT dan PMTT dalam menduga rasio odds pada kasus dengan kejadian jarang. Selain itu, akan dievalusi tingkat efisiensi dari kedua metode tersebut dalam menduga harga rasio odds sebenarnya dengan menggunakan kriteria ERE. Kemudian, metode terefisien diimplementasikan pada data hasil penelitian tentang pengaruh Terapi *Therapeutic Exercise Walking* terhadap kualitas tidur klien Penyakit Paru Obstruktif Kronis yang dilakukan oleh Flowerenty (2015).

B. Landasan Teori

Rasio Odds dengan Metode Kemungkinan Maksimum Termodifikasi

Misalkan n_1 dan n_2 adalah jumlah pengamatan dari kelompok 1 dan 2. Sedangkan Y_1 dan Y_2 merupakan jumlah sukses pada kelompok 1 dan 2, yang diperlakukan sebagai peubah acak binomial saling bebas. Data untuk menghitung rasio odds dapat disajikan pada Tabel 1. Misalkan π_1 dan π_2 adalah peluang kejadian sukses dalam kelompok 1 dan 2. Jika peluang munculnya setiap titik sampel adalah sama, maka $\pi = Y/n$.

Odds kejadian sukses dalam kelompok ke-t $(t = 1, 2)$ didefiniskan sebagai Ω_t = $\pi_t/(1-\pi_t)$. Sehingga rasio odds (θ) dapat didefinisikan:

$$\theta = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{\pi_1/(1-\pi_1)}{\pi_2/(1-\pi_2)}. \qquad \ldots(1)$$

Dugaan bagi π, $\hat{\pi}$, diperlukan untuk menduga θ. Karena Y merupakan peubah dikotomus, maka $\hat{\pi}$ dapat diperoleh dari dugaan parameter sebaran binomial dengan menggunakan Metode PKM. Fungsi kepadatan peluang sebaran binomial adalah:

$$p(y) = \binom{n}{y}\pi^y(1-\pi)^{n-y}\,; y = 0, 1, \ldots, n. \qquad \ldots(2)$$

Jika Y_1, Y_2, … ,Y_m adalah sampel acak sebanyak m yang i.i.d dari sebaran binomial, maka fungsi kemungkinannya adalah:

$$L(\pi|y_i) = \prod_{i=1}^{m}\binom{n}{y_i}\pi^{y_i}(1-\pi)^{n-y_i}. \qquad \ldots(3)$$

Fungsi log-kemungkinannya adalah:

$$l(\pi|y_i) = ln\left\{\pi^{\sum_{i=1}^{m} y_i}(1-\pi)^{mn-\sum_{i=1}^{m} y_i}\prod_{i=1}^{m}\binom{n}{y_i}\right\}. \qquad \ldots(4)$$

Dengan menggunakan Metode PKM diperoleh dugaan bagi π:

$$\hat{\pi} = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i}{mn} \qquad \ldots(5)$$

Karena $m = 1$, maka

$$\hat{\pi} = \frac{y}{n}. \qquad \ldots(6)$$

Jadi, penduga rasio odds dengan metode PKM ($\hat{\theta}_{PKM}$) adalah

$$\hat{\theta}_{PKM} = \frac{\hat{\pi}_1/(1-\hat{\pi}_1)}{\hat{\pi}_2/(1-\hat{\pi}_2)} = \frac{\frac{y_1/n_1}{1-(y_1/n_1)}}{\frac{y_2/n_2}{1-(y_2/n_2)}} = \frac{y_1/(n_1-y_1)}{y_2/(n_2-y_2)} \qquad \ldots(7)$$

Dengan y_1= Y_1 dan y_2= Y_2, maka Persamaan (7) dapat pula ditulis

$$\hat{\theta}_{PKM} = \frac{Y_1/(n_1-Y_1)}{Y_2/(n_2-Y_2)} = \frac{Y_1(n_2-Y_2)}{Y_2(n_1-Y_1)}. \qquad \ldots(8)$$

Untuk menghitung $\hat{\theta}_{PKMT}$, tambahkan 0,5 pada setiap sel pada Tabel 1, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 2.

Karena dalam menduga peluang sukses pada PKMT mirip dengan PKM, maka

$\hat{\theta}_{PKMT}$ dapat diperoleh dengan memodifikasi Persamaan (10). Karena $\hat{\pi}_t = \frac{(Y_t + 0,5)}{(n_t+1)}$ dan $(1 - \hat{\pi}_t) = \frac{(n_1 - Y_1 + 0,5)}{(n_1+1)}$ dengan $t = 1, 2$, maka

$$\hat{\theta}_{PKMT} = \frac{\frac{(Y_1 + 0,5)/(n_1+1)}{(n_1 - Y_1 + 0,5)/(n_1+1)}}{\frac{(Y_2 + 0,5)/(n_2+1)}{(n_2 - Y_2 + 0,5)/(n_2+1)}} = \frac{(Y_1 + 0,5)(n_2 - Y_2 + 0,5)}{(Y_2 + 0,5)(n_1 - Y_1 + 0,5)} \quad \ldots(9)$$

dengan 0,5 sebagai tetapan dari metode PKMT sebagaimana diusulkan oleh Haldane (1955) serta Gart dan Zweifel (1967).

Tabel 2. Tabel Kontingensi untuk Metode PMKT

Kelompok	Hasil		Total
	Sukses	Gagal	
1	$Y_1 + 0,5$	$n_1 - Y_1 + 0,5$	n_1+1
2	$Y_2 + 0,5$	$n_2 - Y_2 + 0,5$	n_2+1
Total	$Y_1 + Y_2+1$	$(n_1 - Y_1 + 0,5) + (n_2 - Y_2 + 0,5)$	

Rasio Odds dengan Metode Median Takbias Termodifikasi

Misalkan $\tilde{p}$ penduga peluang kejadian sukses yang memenuhi

$$P(\tilde{p} \le p) \ge 0,5 \text{ dan } P(\tilde{p} \ge p) \ge 0,5. \quad \ldots(10)$$

Untuk memperoleh $\tilde{p}$, digunakan sebaran binomial, $Y_t \sim B(n_t, p_t)$, dimana Y_t merupakan peubah acak yang merepresentasikan kejadian sukses dalam kelompok ke-t $(t = 1,2)$. Misalkan y_t adalah harga dari Y_t, maka

$$P(Y_t = y_t | p_t) = \binom{n_t}{y_t} p_t^{y_t} (1 - p_t)^{n_t - y_t}. \quad \ldots(11)$$

PKMT dapat dihitung dari sebaran statistik cukup (*sufficient statistics*) bagi data binomial. Hitung harga p_t^L dan p_t^U menjadi harga p_t yang memenuhi

$$P(Y_t \ge y_t | p_t = \tilde{p}_t^L) \ge 0,5, \text{ dan } P(Y_t \le y_t | p_t = \tilde{p}_t^U) \ge 0,5, \quad \ldots(12)$$

di mana p_t^L dan p_t^U, secara berurutan, merupakan harga terendah dan tertinggi bagi p_t. Kemudian, PMMT didefinisikan sebagai

$$\tilde{p}_t = \frac{(\tilde{p}_t^L + \tilde{p}_t^U)}{2}. \quad \ldots(13)$$

Saat $0 < Y_t \le n_t$, kita dapat memperoleh harga $\tilde{p}_t^L$ dan $\tilde{p}_t^U$ yang memenuhi

$$P(Y_t \ge y_t | p_t = \tilde{p}_t^L) = P(Y_t \le y_t | p_t = \tilde{p}_t^U) = 0,5. \quad \ldots(14)$$

Kemudian, hitung $\tilde{p}_t^L$ dengan menyelesaikan Persamaan (17)

$$0,5 = P(Y_t \ge y_t | p_t = \tilde{p}_t^L) = \sum_{i=y_t}^{n_t} \binom{n_t}{i} (\tilde{p}_t^L)^i (1 - \tilde{p}_t^L)^{n_t - i}, \quad \ldots(15)$$

dan hitung $\tilde{p}_t^U$ dengan menyelesaikan Persamaan (18)

$$0,5 = P(Y_t \le y_t | p_t = \tilde{p}_t^U) = \sum_{i=0}^{y_t} \binom{n_t}{i} (\tilde{p}_t^U)^i (1 - \tilde{p}_t^U)^{n_t - i} \quad \ldots(16)$$

Dengan menggunakan hubungan antara fungsi kumulatif sebaran beta dan fungsi kumulatif sebaran binomial (Daly, 1992 dan Jhonson dkk., 2005), harga $\tilde{p}_t^L$ dan $\tilde{p}_t^U$ dapat diperoleh secara langsung. Misalkan U adalah peubah acak tentang peluang sukses yang berdistribusi beta(α, β), maka peluang $P(U \le p_t)$ adalah

$$\begin{aligned} F(p_t, \alpha, \beta) &= \int_0^{p_t} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} U^{\alpha-1} (1 - U)^{\beta-1} dU \\ &= \sum_{i=a}^{n_t} \binom{n_t}{i} p_t^i (1 - p_t)^{n_t - i} \end{aligned} \quad \ldots(17)$$

Hitung $\tilde{p}_t^L$ dan $\tilde{p}_t^U$ sedemikian sehingga

$$F(\tilde{p}_t^L | \alpha = y_t, \beta = n_t - y_t + 1) = 0,5, \quad \text{...(18)}$$
$$F(\tilde{p}_t^U | \alpha = y_t + 1, \beta = n_t - y_t + 2) = 0,5, \quad \text{...(19)}$$

dengan

$$\tilde{p}_t^L = F^{-1}(0,5\ | \alpha = y_t, \beta = n_t - y_t + 1) \quad \text{...(20)}$$
$$\tilde{p}_t^U = F^{-1}(0,5\ | \alpha = y_t + 1, \beta = n_t - y_t + 2) \quad \text{...(21)}$$

$F^{-1}(Q\ |\alpha, \beta)$ adalah kuantil ke-Q dari sebaran beta dengan parameter α dan β.

Dengan demikian, $\tilde{p}_t$ $(t = 1, 2)$ dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan (13). Kemudian hitung $\hat{\theta}_{PMTT}$ dengan persamaan

$$\hat{\theta}_{PMTT} = \frac{\tilde{p}_1/(1-\tilde{p}_1)}{\tilde{p}_2/(1-\tilde{p}_2)}, \quad \text{...(22)}$$

dengan $\tilde{p}_1$ dan $\tilde{p}_2$, secara berurutan, adalah penduga peluang sukses kelompok 1 dan 2.

Kajian Simulasi

ERE digunakan untuk mengevalusi penduga rasio odds (Raweesawat, 2016), didefinisikan:

$$ERE = \left(\frac{|\theta - \widehat{\theta_r}|}{\theta}\right) \times 100\% \quad \text{...(24)}$$

Harga rasio odds yang sebenarnya dinotasikan θ dan $\widehat{\theta_r}$ $(r = 1, 2)$ adalah penduga rasio odds PKMT dan PMTT. Nilai ERE lebih kecil menunjukan tingkat efisiensi lebih baik.

Pasangan jumlah pengamatan yang digunakan dalam simulasi yaitu $(n_1, n_2) \in \{(10{,}10), (10{,}30), (10{,}50)\}$ dan peluang sukses kelompok 1 dan 2 sebesar p_t (t = 1, 2). Setiap pasang harga (p_1, p_2) merupakan hasil kombinasi dari $p_t \in$ {0,01, 0,03, 0,05, 0,1, 0,15}. Sehingga diperoleh sebanyak $3 \times \left\{\frac{1}{2} \times 5 \times (5 + 1)\right\} = 45$ skenario. Simulasi dilakukan dengan ulangan sebanyak 5.000 kali.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Hasil Simulasi

Hasil simulasi disajikan pada Tabel 3 menunjukkan harga ERE untuk kedua metode pada setiap skenario. Berdasarkan Tabel 3, dapat diketahui bahwa metode PKMT lebih banyak menghasilkan harga ERE terkecil daripada metode PMTT, yakni dengan 53%. Sehingga dapat dikatakan bahwa secara keseluruhan $\hat{\theta}_{PKMT}$ lebih baik daripada $\hat{\theta}_{PMTT}$.

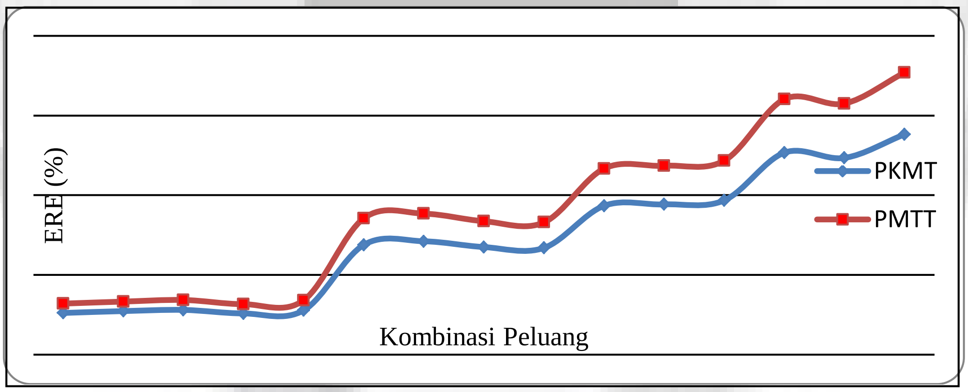
Berdasarkan data pada Tabel 3 dibuat diagram garis dari ERE_{PKMT} dan ERE_{PMTT} berdasarkan kombinasi jumlah pengamatan (n_1, n_2) yang disajikan pada Gambar 1, Gambar 2, dan Gambar 3 yang apabila dicermati, akan ditemukan beberapa pola ERE yang mirip dari beberapa skenario simulasi. Yaitu, pada saat harga p_1 sama, selisih ERE_{PKMT} dan ERE_{PMTT} cenderung konstan untuk setiap p_2 yang berbeda. Hal tersebut menandakan bahwa Metode PMTT merupakan penduga yang sama konsistennya dengan Metode PMKT pada p_1 yang sama. Selain itu, ERE_{PKMT} dan ERE_{PMTT} yang tidak terlalu fluktuatif mengidikasikan bahwa $\hat{\theta}_{PKMT}$ dan $\hat{\theta}_{PMTT}$ adalah konsisten terhadap θ. Oleh sebab itu, meskipun pada Metode PKMT secara keseluruhan lebih baik. Namun kedua metode tersebut tetap dapat digunakan untuk menduga rasio odds pada kasus dengan kejadian jarang.

ERE_{PMTT} cenderung semakin kecil daripada ERE_{PKMT} seiring dengan membesarnya n_2, dengan $n_1 < n_2$. Terlebih saat $n_1 = 10$ dan $n_2 = 50$, semua harga

ERE_{PMTT} lebih kecil daripada ERE_{PKMT}. Itu berarti bahwa pada kasus kejadian jarang dan saat jumlah pengamatan berbeda, dengan $n_1 < n_2$, $\hat{\theta}_{PMTT}$ menunjukkan efisiensi yang lebih baik daripada $\hat{\theta}_{PKMT}$. Sedangkan untuk $n_1 = n_2$, semua ERE_{PKMT} lebih kecil daripada ERE_{PMTT}, sehingga dapat dikatakan bahwa pada jumlah pengamatan yang sama, $\hat{\theta}_{PKMT}$ lebih baik daripada $\hat{\theta}_{PMTT}$.

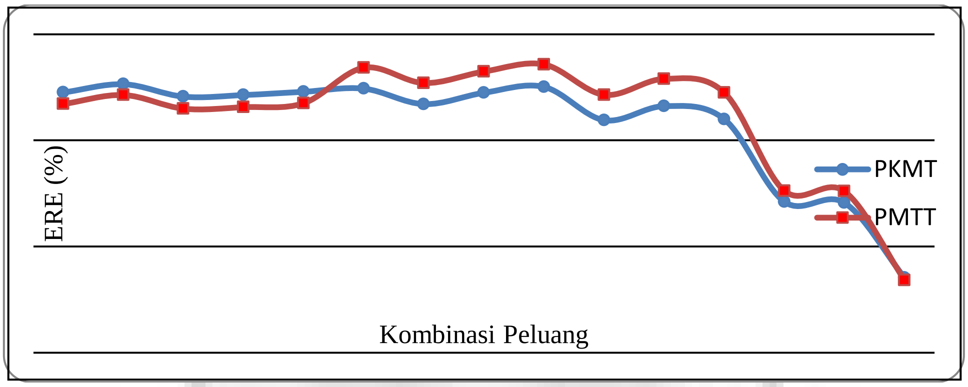
Tabel 3. Harga Estimated Related Error Hasil Simulasi

No.	(p_1, p_2)	(n_1,n_2)					
		(10,10)		(10,30)		(10,50)	
		ERE (%)		ERE (%)		ERE (%)	
		PKMT	PMTT	PKMT	PMTT	PKMT	PMTT
1	(0,01 , 0,01)	26.17	32.05	197.55	192.10	325.28	297.37
2	(0,01 , 0,03)	27.34	33.31	201.45	196.36	329.44	300.57
3	(0,01 , 0,05)	28.08	34.31	195.59	189.93	331.10	303.45
4	(0,01 , 0,1)	25.87	31.67	196.35	190.64	324.28	296.17
5	(0,01 , 0,15)	27.86	34.17	197.89	192.53	325.58	297.64
6	(0,03 , 0,03)	68.89	85.56	199.37	209.23	235.57	226.78
7	(0,03 , 0,05)	71.11	88.44	192.08	202.02	241.07	233.45
8	(0,03 , 0,1)	67.50	83.76	197.42	207.41	254.17	247.89
9	(0,03 , 0,15)	67.01	83.00	200.17	210.76	242.10	234.56
10	(0,05 , 0,05)	93.40	116.73	184.51	196.46	188.12	184.54
11	(0,05 , 0,1)	94.25	118.48	191.12	203.95	193.66	190.04
12	(0,05 , 0,15)	96.81	121.73	184.94	197.44	200.88	196.83
13	(0,1 , 0,1)	126.71	160.26	146.07	151.23	122.18	111.80
14	(0,1 , 0,15)	123.42	157.51	145.58	150.98	117.89	107.43
15	(0,15 , 0,15)	138.19	176.98	110.27	109.16	92.69	83.61



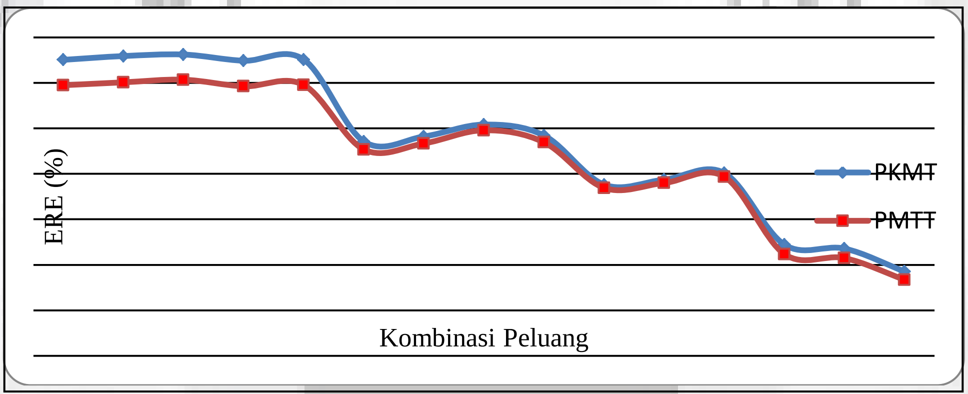
Gambar 1. ERE saat n_1 = 10 dan n_2 = 10

Berdasarkan Gambar 1 dapat diketahui bahwa semua harga ERE_{PKMT} lebih kecil daripada ERE_{PMTT}. Sehingga dapat dikatakan bahwa saat n_1 = 10 dan n_2 = 10 Metode PKMT lebih efisien dalam menduga harga rasio odds daripada metode PMTT.



Gambar 2. ERE saat n_1 = 10 dan n_2 = 30

Berdasarkan Gambar 2 dapat diketahui bahwa meskipun ada ERE_{PMTT} yang berharga terkecil tetapi harga ERE terkecil lebih didominasi oleh ERE_{PKMT} daripada ERE_{PMTT}. Sehingga, untuk kombinasi n_1 = 10 dan n_2 = 30, dapat dikatakan bahwa metode PKMT lebih efisien dalam menduga rasio odds daripada metode PMTT.



Gambar 3. ERE saat n_1 = 10 dan n_2 = 50

Berdasarkan Gambar 3 dapat diketahui bahwa harga ERE terkecil diantara dua metode lebih didominasi oleh ERE_{PMMT} daripada ERE_{PKMT}. Sehingga dapat dikatakan bahwa untuk kombinasi n_1 = 10 dan n_2 = 50 metode PMTT lebih efisien dalam menduga rasio odds daripada metode PKMT.

Rasio Odds dengan Metode PKMT

Data hasil penelitian Flowerenty (2015) disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Tabulasi Silang Kualitas Tidur Klien PPOK

Kelompok	Hasil		Total
	Baik	Buruk	
1	5	7	12
2	0	15	15
Total	5	22	

Kelompok 1 terdiri dari klien yang diberi perlakuan *Therapeutic Exercise Walking*, sedangkan kelompok 2 tidak. Karena perhatian terpusat pada kualitas tidur yang baik, maka diperoleh $Y_1 = 5$ dan $Y_2 = 0$, dengan Y_1 dan Y_2 merupakan kualitas tidur yang baik pada kelompok perlakuan dan kontrol. Jumlah pengamatan pada kelompok 1 dan 2 dinyatakan dengan $n_1 = 12$ dan $n_2 = 15$.

Penduga rasio odds dengan metode PKMT dapat diperoleh dengan Persamaan (9). Dengan demikian, penduga rasio oddsnya adalah

$$\hat{\theta}_{PKMT} = \frac{(5+0{,}5)(15-0+0{,}5)}{(0+0{,}5)(12-5+0{,}5)} = \frac{85{,}25}{3{,}75} = 22{,}73$$

Harga $\hat{\theta}_{PKMT} = 22{,}73$ bermakna kecenderungan kualitas tidur yang baik dari kelompok 1 adalah 22,73 lebih besar daripada kelompok 2. Jadi, klien yang mendapat perlakuan *Therapeutic Exercise Walking* 22,73 kali lebih cenderung memiliki kualitas tidur yang baik daripada klien yang tidak mendapat perlakuan.

D. Kesimpulan

Hasil pendugaan rasio odds kedua metode menunjukkan selalu berada pada selang 0 dan ∞. Meskipun tingkat efisiensi Metode PKMT lebih baik daripada PMTT dalam menduga rasio odds yang sebenarnya pada kasus dengan kejadian jarang. Namun, tingkat efisiensi keduanya adalah tidak jauh berbeda. Sehingga, keduanya dapat digunakan untuk menghitung rasio odds pada kasus dengan kejadian jarang. Untuk pasangan (n_1, n_2) yang sama, $\hat{\theta}_{PMKT}$ lebih baik daripada $\hat{\theta}_{PMTT}$. Namun, untuk pasangan (n_1, n_2) yang berbeda, ERE_{PMTT} $\hat{\theta}_{PMTT}$ lebih baik daripada $\hat{\theta}_{PMKT}$ karena cenderung menjukkan efisiensi yang semakin lebih kecil daripada ERE_{PKMT}.

Rasio odds kualitas tidur klien PPOK adalah $\hat{\theta}_{PKMT} = 22{,}73$. Artinya kecenderungan kualitas tidur yang baik dari kelompok 1 adalah 22,73 lebih besar daripada kelompok 2. Jadi, klien pada kelompok 1 22,73 kali lebih cenderung memiliki kualitas tidur yang baik daripada klien pada kelompok 2.

E. Saran

Saran Teoritis

Perlu dikembangkan metode lain yang memiliki tingkat efisiensi yang lebih kecil secara konsisten pada setiap kombinasi n_t dan p_t dari kedua metode tersebut. Dengan disertai perhitungan galat baku sehingga dapat dihitung dan dibandingkan selang kepercayaan dari metode-metode yang diteliti.

Saran Praktis

Peneliti yang menggunakan metode rasio odds pada kasus dengan kejadian jarang untuk menggunakan salah satu dari metode PKMT dan PMTT karena memiliki tingkat efisiensi yang tidak jauh berbeda. Namun, pertimbangkan pula keyakinan peneliti terkait dengan memasukkan "data palsu" pada metode PKMT.

Daftar Pustaka

Agresti, Alan dan Ming-Chung Yang. 1987. An Empirical Investigation of Some Effects of Sparseness in Contingency Tables. Computational Statistics & Data Analysis. Volume 5 Nomor 1.

Bishop, Yvonne M, Stephen E. Fienberg & Paul W. Holland. 2007. Discrete Multivariate Analysis. New York: Springer.

Flowerenty, Dini Dian. 2015. Pengaruh Therapeutic Exercise Walking terhadap Kualitas Tidur Klien dengan Penyakit Paru Obstruksi Kronik (PPOK) di Poli Spesialis Paru B Rumah Sakit Paru Kabupaten Jember. Skripsi Universitas Jember.

Gart, John J dan James R. Zweifel. 1967. On the Bias of Various Estimators of the Logit and Its Variance with Application to Quantal Biossay. Biometrika. Volume 54

Nomer 1 dan 2.

Haldane, J. B. S. 1956. The Estimation and Significance of the Logarithm of A Ratio of Frequencies. Annals of Human Genetics. Volume 20 Nomer 4.

Hirji, K. F., Tsiatis, A.A., dan Mehta, C.R. 1989. Median Unbiased Estimation for Binary Data. The American Statistician. Volume 43.

Parzen, Michael, Struart Lipsitz, Joseph Ibrahim dan Neil Klar. 2002. An Estimate of the Odds Ratio That Always Exists. Journal of Computational and Graphical Statistics. Volume 11 Nomer 2.

Raweesawat, Kobkun, Yupaporn Areepong. Katechan Jampachaisri, & Saowanit Sukparungsee. 2016. Odds Ratio Estimation of Rare Event in Binomial Distribution. Journal of Probability and Statistics. Volume 2016.

Saefuddin, Asep, Khairil Anwar Notodiputro, Aam Alamudi, & Kusman Sadik. 2009. Statistika Dasar. Jakarta: Grasindo.