Reliabilitas *Stress-Strength* dengan Distribusi Weibull

Relibility *Stress-Strength* with Weibull Distribution

[1]Nina Permatasari, [2]Sutawanir Darwis, [3]Abdul Kudus

[1,2,3]Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

email: [1]permatasarinina29@gmail.com, [2]std.darwis@gmail.com ,[3]akudus69@yahoo.com

Abstract. Random variable stress Y and random variable strength X along with estimate parameter reliability. The model which is used in order to distribution model Weilbull with the shape of parameter same that is α but have different scale parameter that is θ_1 and θ_2. Reliability parameter R definition as a opportunity from strength more large from stress, that is $R = P(X > Y)$. Based on distribution of model which assumption resulted that reliabilty parameter R = $\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}$. With used all of the real data did it estimation parameter the method of maximum likelihood . there is estimate parameter stages with method of maximum likelihood and formed confidence interval with bootstrap-persentile. In this minithesis application for the data fatigue with specimen diameter 21 mm (strength) and diameter 50 mm (stress), which is for strength variable form estimate parameter α = 0,93308 and estimate parameter scale θ_1 = 1088102 and for variable stress form estimate α = 0,83361 and estimate parameter θ_2 = 335326, and estimate value reliability $\hat{R}$ = 0,7479541119. And confidence interval bootstrap-persentile resulting under value limit persentile going 25 that is 0.5545906 and limit persentile upper going to 975 that is 0.8961282.

Keywords: Reliability, Stress-Strength, Maximum Likelihood Estimation, Bootstrap-Percentil.

Abstrak. Variabel acak *strength X* dan variabel acak *stress Y* beserta penaksiran parameter keandalan (*reliability*)-nya. Model yang digunakan adalah model distribusi Weibull dengan parameter bentuk (*shape*) yang sama yakni α tetapi memiliki parameter skala (*scale*) yang berbeda yakni θ_1 dan θ_2. Parameter keandalan *R* didefinisikan sebagai peluang dari *strength* lebih besar dari *stress*, yakni $R = P(X > Y)$. Berdasarkan model distribusi yang diasumsikan diperoleh bahwa parameter keandalan $R = \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}$ Dengan menggunakan data riil akan dilakukan penaksiran semua parameter tersebut dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum. Adapun tahapan penaksiran parameter dengan metode kemungkinan maksimum dan membentuk selang kepercayaan dengan bootstrap-persentil. Dalam penelitian ini diaplikasikan untuk data *fatigue* dengan specimen diameter 21 mm (*strength*) dan diameter 50 mm (*stress*), dimana untuk variabel *strength* membentuk taksiran paramater bentuk α = 0,93308 dan taskiran parameter skala θ_1 = 1088102 dan untuk variabel *stress* membentuk taksiran parameter bentuk α = 0,83361 dan taskiran parameter skala θ_2 = 335326 , dan nilai taksiran reliabilitas $\hat{R} = 0.7479541119$. dan selang kepercayaan bootstrap-persentil menghasilkan nilai batas bawah persentil yang ke 25 yaitu 0.5545906 dan batas atas persentil yang ke 975 yaitu 0.8961282.

Kata Kunci: Reliabilitas, *Stress-Strength, Maximum Likelihood Estimation,* Bootstrap-Persentil.

A. Pendahuluan

Setiap peristiwa akan mempunyai peluang masing-masing, dan peluang terjadinya peristiwa tersebut akan mempunyai penyebaran yang mengikuti suatu pola tertentu yang disebut dengan distribusi. Distribusi peluang untuk suatu variabel acak menggambarkan pola penyebarannya untuk setiap nilai dari variabel acak tersebut. Ada dua jenis distribusi peluang sesuai dengan variabel acaknya yaitu distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu. Jika variabel acaknya berupa variabel diskrit, maka distribusi peluangnya adalah distribusi peluang diskrit, sedangkan jika variabel acaknya berupa variabel kontinu, maka distribusi peluangnya adalah distribusi peluang kontinu.

Beberapa model distribusi peluang kontinu yang dikenal dalam ilmu peluang diantaranya adalah distribusi Normal, distribusi Gamma, distribusi Eksponensial, dan distribusi Weibull. Model distribusi peluang Weibull adalah model distribusi peluang yang memiliki peranan yang penting terutama pada persoalan keandalan (*reliability*) dan analisis rawatan (*mantainabiliy*). Distribusi Weibull pertama kali diperkenalkan oleh Fisikawan Swedia yaitu Wallodi Weibull pada tahun 1936 dengan tiga parameter, yang kemudian terdapat distribusi Weibull dengan dua dan satu parameter.

Tingkat keandalan suatu komponen ditetapkan pada masa perancangan. Agar keandalan komponen dapat ditentukan pada tahap perancangan maka diperlukan suatu metodologi yang bersifat probabilistik yang dikenal sebagai perancangan probabilistik. Salah satunya adalah dengan menentukan keandalan berdasarkan *stress* (Y) dan *strength* (X), karena salah satu yang mempengaruhi laju kegagalan suatu komponen adalah *stress* atau tekanan. Komponen akan tetap andal apabila kekuatannya masih lebih besar daripada tekanannya. Dalam hal ini ditentukan sebuah parameter keandalan R yang didefinisikan sebagai R=P(X>Y) (Ayman baklizi, 2003).

Keandalan R suatu komponen diartikan sebagai peluang komponen tersebut akan berfungsi dengan baik jika dioperasikan dalam kondisi lingkungan tertentu. Parameter R ini mencerminkan daya tahan atau tingkat kekuatan (*strength*) komponen tersebut dalam menghadapi *stress* yaitu gaya tekanan yang terjadi dalam suatu lingkungan tertentu seperti tekanan angin, tekanan ledakan, tekanan akibat kenaikan suhu, tekanan beban, dan lain sebagainya.

Dalam makalah ini akan dibahas mengenai keandalan pada model *stress-strength*, yaitu parameter keandalan R merupakan peluang dari *strength* lebih besar dari *stress* atau R = P(X > Y). Lebih lanjut lagi variabel acak *strength* X maupun variabel acak *stress* Y diasumsikan berdistribusi Weibull yang saling bebas dengan parameter bentuk (*shape*) yang sama yakni α tetapi memiliki parameter skala (*scale*) yang berbeda yakni θ_1 dan θ_2. Dan akan diaplikasikan dalam data *fatigue* yang terbuat dari material EN-GJS-400-18-LT dengan efek ukuran besi cor *ductile* yang menggunakan data dua set specimen diameter 21 mm (Ø 21) dan set specimen 50mm (Ø 50).

Hal yang penting dalam pemodelan statistika adalah cara untuk menaksir parameter modelnya. Pada dasarnya, penaksiran adalah suatu metode untuk mengetahui taksiran parameter dari suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Terdapat beberapa metode penaksiran parameter model statistika, diantaranya metode *Ordinary Least Square* (OLS), dan metode *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE).

Metode *Maksimum Likelihood Estimastion* (MLE) yang pertama kali dikembangkan oleh R.A Fisher tahun 1920. Prinsip dari MLE adalah menentukan penaksir parameter yang memaksimumkan fungsi *Likelihood*.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka perumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana uji kecocokan data dengan distribusi Weibull
2. Bagaimana penaksiran parameter reliabilitas *stress-strength* dengan metode *Maksimum Likelihood Estimastion* (MLE)
3. Bagaimana pembentukan selang kepercayaan bagi parameter *stress-strength* dengan Bootstrap-percentil

Selanjutnya, tujuan dalam penelitian ini dalam pokok-pokok sbb.

1. Untuk menentukan kecocokan data dengan distribusi Weibull
2. Untuk menentukan cara menaksir reliabilitas *stress-strength* dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)
3. Untuk menentukan cara membentuk selang kepercayaan bagi parameter *stress-strength* dengan Bootstrap-persentil

B. Landasan Teori

Teori Keandalan

Keandalan dalam pengertian yang luas dapat dikatakan sebagai ukuran prestasi. Seseorang yang mampu menyelesaikan pekerjaannya dengan baik ada waktu yang telah ditentukan maka orang tersebutdikatakan dapat diandalakan.

Konsep keandalan tidak hanya dipakai dalam kegiatan manusia tetapi prestasi fungsional dari objek yang dibuat manusia seperti peralatan ataupun komponen elektronik, komponen mesin, dan sebagainya.

Distribusi Weibull

Jika sebuah variabel acak kontinu X memilki distribusi Weibull dengan parameter bentuk α dan parameter skala θ dimana α > 0 dan $\theta > 0$, maka fungsi kepadatan probabilitas dari X adalah :

$$f(x;a;\theta) = \frac{\alpha}{\theta} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^{\alpha}}{\theta}}; \qquad ...(2.1)$$

Memiliki fungsi kumulatif distribusi Weibull

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\alpha}}$$

Memiliki expetasi dan varians distribusi Weibull

$$E(x) = \theta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{dan} \quad V(x) = \theta^2\left[\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

Uji Kecocokan Distribusi Anderson-Darling

Uji kecocokan distribusi adalah suatu pengujian hipotesis statistik yang digunakan untuk mengetahui apakah $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah nilai dari sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ yang berdistribusi dengan fungsi distribusi $F(\cdot)$. Uji kecocokan distribusi dapat digunakan untuk menguji hipotesis berikut:

H_0 : $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan nilai dari sampel acak yang berdistribusi dengan fungsi distribusi $F(\cdot)$.

H_1 : $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan nilai dari sampel acak yang berdistribusi dengan fungsi distribusi bukan $F(\cdot)$.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah nilai dari sampel acak berukuran *n*. Statistik uji Anderson-Darling adalah :

$$A_n{}^2 = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{n}\right)\left[ln\left(F\left(x_{(i)}\right)\right) + ln\left(1 - F\left(x_{(n+1-i)}\right)\right)\right] - n \qquad \ldots (2.2)$$

dimana $F(\cdot)$ adalah taksiran fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi yang dihipotesiskan. Nilai kritis untuk Anderson- Darling untuk berbagai kasus dan taraf nyata, α=10% adalah 1,933, untuk taraf nyata 5% adalah 2,493, untuk taraf nyata 1% adalah 3,857. Sedangkan kriteria pengujiannya adalah tolak hipotesis nol jika statistik uji $A_n{}^2$ lebih besar dari nilai kritis pada taraf nyata yang ditetapkan.

Reliabilitas Model *Stress-Strength*

Keandalan pada model *stress-strength* didefinisikan sebagai probabilitas komponen berfungsi dengan baik yaitu apabila *strength* (*X*) komponen lebih besar dari *stress* (*Y*) yang membenani komponen tersebut atau *X*>*Y*. Perbedaan dengan pengertian keandalan yang lazim adalah bahwa keandalan pada model *stress-stregth* bukan merupakan fungsi waktu.

Reliabilitas *Stress-Strength* Untuk distribusi Weibull dengan parameter shape α yang sama tetapi parameter skala berbeda (θ_1 dan θ_2)

Jika diketahui bahwa variabel acak *strength* (*X*) dan *stress* (*Y*) masing mempunyai distribusi Weibull dengan parameter bentuk yang sama sebesar yakni α sedangkan parameter skalanya berbeda yakni θ_1 dan θ_1 Dengan demikian fungsi reliabilitas *stress-strength*-nya adalah:

$$R = P(X > Y) = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \qquad \ldots(2.3)$$

Metode penggunaan kemungkinan maksimum

Jika $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dan $y = (y_1, \ldots, y_m)$ adalah sampel acak *strength* (*Y*) dan sampel acak *stress* (*X*) diasumsikan distribusi Weibull saling bebas dengan fungsi densitas $X \sim W(x_i, \alpha, \theta_1)$ dan $Y \sim W(y_j, \alpha, \theta_2)$ maka fungsi kemungkinannya adalah

$$L(\theta) = \prod^{n} f(x_i, y_j, \alpha, \theta_1, \theta_2)$$

Metode penaksir parameter dengan metode maksimum likelihood bagi *R*

Misalkan $X_i, \cdots, X_n$ adalah suatu sampel acak berukuran n_i dari variabel acak *strength* (*X*) yang mengikuti distribusi Weibull (α, θ_1) dan $Y_i, \cdots, Y_m$ adalah suatu sampel acak berukuran m_j dari peubah acak *stress* (*Y*) yang mengikuti distribusi Weibull (α, θ_2), fungsi densitas didefinisikan sebagai berikut:

$$f_x(x; a; \theta_1) = \frac{\alpha}{\theta_1} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\theta_1}}, x \geq 0 \quad \text{dan} \quad f_y(y; a; \theta_2) = \frac{\alpha}{\theta_2} y^{\alpha-1} e^{-\frac{y^\alpha}{\theta_2}}, y \geq 0$$

Penduga kemungkinan maksium bagi $R = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$ adalah $\hat{R} = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}$ dengan $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ adalah nilai dugaan yang diperoleh menggunakan metode kemungkinan maksimum. Berikut ini penurunan $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$.

Berikut ini logaritma natural dari fungsi kemungkinan :

$$\ell = (m+n)\ln\alpha - n\ln\theta_1 - m\ln\theta_2 + (\alpha-1)*\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + \sum_{j=1}^{m}\ln y_j\right) - \frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} - \frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{m} y_j^{\alpha} \quad ...(2.4)$$

Untuk memperoleh dugaan bentuk parameter bentuk α , diperoleh :

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = \frac{m+n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i + \sum_{j=1}^{m}\ln y_j - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\ln x_i - \frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{m} y_j^{\alpha}\ln y_j = 0 \quad ...(2.5)$$

Untuk memperoleh dugaan parameter skala θ_1,danθ_2 diperoleh :

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = -\frac{n}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_1^2}\sum_{i-1}^{n} x_i^{\alpha} = 0$$

...(2.6)

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_2} = -\frac{n}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2^2}\sum_{j=1}^{m} y_j^{\alpha} = 0 \quad ...(2.7)$$

Untuk persamaan 2.6 dan 2.7 akan menghasilkan $\hat{\theta}_1(\alpha)$ dan $\hat{\theta}_2(\alpha)$

$$\hat{\theta}_1(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} \qquad \text{dan} \qquad \hat{\theta}_2(\alpha) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} y_j^{\alpha}$$

Meletakkan $\hat{\theta}_1(\alpha)$ dan $\hat{\theta}_2(\alpha)$ pada persamaan 2.5 maka menghasilkan pendugaan:

$$\frac{m+n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{\alpha} + \sum_{j=1}^{m}\ln y_j^{\alpha}\right] - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\ln x_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}} - \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j^{\alpha}\ln y_j}{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} y_j^{\alpha}} = 0$$

Untuk itu $\hat{\alpha}$ dapat memperoleh dari solusi persamaan non-linier Dimana *h(α)* dicari dengan cara sebagai berikut :

$$h(\alpha) = \frac{m+n+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{\alpha} + \sum_{j=1}^{m}\ln y_j^{\alpha}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\ln x_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}} + \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j^{\alpha}\ln y_j}{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} y_j^{\alpha}}}$$

Dengan demikian $\hat{\alpha}$ dapat diperoleh dengan menggunakan prosedur iterasi sebagai berikut :

$$\alpha_{(j+1)} = h(\alpha_{(j)})$$

Dimana $\alpha_{(j)}$ adalah pada iterasi ke-j dengan menetapkan α_0 sembarang Prosedur iterasi harus dihentikan ketika perbedaan nilai mutlak antara $\alpha_{(j)}$ dan $\alpha_{(j+1)}$ cukup kecil.

Setelah memperoleh $\hat{\alpha}$ dan skala parameter $R = \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}$ bisa didapatkan dari dari masing-masing $\hat{\theta}_1(\alpha)$ dan $\hat{\theta}_2(\alpha)$ dan dugaan bagi *R* dengan menggunakan fungsi kemungkinan tersebut adalah

$$\hat{R} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}} + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j^{\hat{\alpha}}} \quad ...(2.8)$$

Membentuk selang kepercayaan dengan metode bootstrap-persentil

Secara umum langkah-langkah penentuan taksiran bootstrap persentil untuk distribusi Weibull yaitu :

1. Berdasarkan data sampel asli $x = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ dan $y = \{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m\}$.
2. Mengambil sampel acak dengan pengembalian dari data sampel asli untuk menghasilkan sampel bootstrap $\{x_1^*, x_2^*, x_3^* \cdots x_n^*\}$ dan $\{y_1^*, y_2^*, y_3^* \cdots\cdots y_m^*\}$.
3. Menghitung $\hat{\alpha}^*$ dengan menggunakan iterasi

$$\hat{\alpha}^* = \frac{m + n + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{*\alpha^*} + \sum_{j=1}^{m} \ln y_j^{*\alpha^*}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{*\alpha^*} \ln x_i^*}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{*\alpha^*}} - \dfrac{\sum_{j=1}^{m} y_j^{*\alpha^*} \ln y_j^{\;*}}{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j^{*\alpha^*}}}$$

Menghitung taksiran $\hat{R}^*$

$$\hat{R}^* = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{*\hat{\alpha}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{*\hat{\alpha}} + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j^{*\hat{\alpha}}}$$

4. Melakukan pengulangan pada langkah ke-2 sampai langkah ke-4 sebanyak 1000 kali.
5. Menghitung $\hat{R}_{BOOT-P}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. untuk batas bawah.
6. Menghitung $\hat{R}_{BOOT-P}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)$ untuk batas atas.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Hasil Pengujian Kecocokan Distribusi Data Distribusi Weibull

Untuk membuktikan data *fatigue* untuk specimen 21 mm dan 50 mm, akan dilakukan uji kecocokan secara formal menggunakan uji Anderson-Darling. Perumusan hipotesis yaitu:

1. Data *fatigue* untuk specimen 21 mm (*strength*)

H_0 : Data *fatigue* untuk specimen 21 mm berasal dari populasi yang berdistribusi Weibull.

H_1 : Data data *fatigue* untuk specimen 21 mm bukan berasal dari populasi yang berdistribusi Weibull.

2. Data *fatigue* untuk specimen 50 mm (*stress*)

H_0 : Data *fatigue* untuk specimen 50 mm berasal dari populasi yang berdistribusi Weibull.

H_1 : Data *fatigue* untuk specimen 50 mm bukan berasal dari populasi yang berdistribusi Weibull.

Nilai taksirannya untuk data *fatigue* specimen 21 mm (*strength*) dihitung yaitu: $\alpha_1 = 0.93308$ dan $\theta_1 = 1088102$ sedangkan nilai taksirannya untuk data *fatigue* specimen 50 mm (*stress)* dihitung yaitu: $\alpha_2 = 0.83361$ dan $\theta_2 = 335326$

Dengan bantuan hasil perhitungan yang ada pada Tabel 1. dan Tabel 2. , dapat dihitung statistik uji Anderson-Darling dengan menggunakan Persamaan (2.2) yaitu:

$${A_n}^2 = -(-12{,}3474) - 12 = 0{,}3474.$$
$${A_m}^2 = -(-12{,}5073) - 12 = 0{,}5073.$$

Tabel 1. Hasil Perhitungan untuk Uji Anderson-Darling pada data *Strength* (21mm)

i	X_i	$\hat{F}(X_i)$	$\ln(\hat{F}(X_i)$	$\ln(1-\hat{F}(X_i)$	$\ln(1-\hat{F}(X_{n+1-i})$	$\frac{2(i)-1}{n}$	$(7)x[(4)+(6)]$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	83200	0,086816	-2,44396	-0,09082	-3,51201	0,083333	-0,49633
2	92500	0,095394	-2,34973	-0,10026	-2,57618	0,25	-1,23148
3	107700	0,109123	-2,21528	-0,11555	-1,49482	0,41666	-1,54588
4	469500	0,366472	-1,00383	-0,45645	-0,99013	0,583333	-1,16315
5	619200	0,446195	-0,807	-0,59094	-0,75139	0,75	-1,16879
6	67940	0,475014	-0,74441	-0,64438	-0,67707	0,916667	-1,30302
7	716400	0,491896	-0,70949	-0,67707	-0,64438	1,083333	-1,46669
8	801000	0,52829	-0,63811	-0,75139	-0,59094	1,25	-1,53632
9	1076600	0,628473	-0,46446	-0,99013	-0,45645	1,416667	-1,30463
10	1674100	0,775712	-0,25397	-1,49482	-0,11555	1,583333	-0,58508
11	3000000	0,923936	-0,07911	-2,57618	-0,10026	1,75	-0,3139
12	4181701	0,970163	-0,03029	-3,51201	-0,09082	1,916667	-0,23213
						Jumlah	**-12,3474**

Tabel 2. Hasil Perhitungan untuk Uji Anderson-Darling pada data S*tress* (50mm)

j	Y_j	$\hat{F}(Y_j)$	$\ln(\hat{F}(Y_j)$	$\ln(1-\hat{F}(Y_j)$	$\ln(1-\hat{F}(Y_{n+1-j})$	$\frac{2(j)-1}{m}$	$(7)x[(4)+(6)]$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	30200	0,125785	-2,07318	-0,13443	-3,62783	0,083333	-0,47508
2	45100	0,171215	-1,76483	-0,18779	-2,21369	0,25	-0,99463
3	46900	0,17636	-1,73523	-0,19402	-2,21178	0,416667	-1,64458
4	47300	0,177495	-1,72881	-0,1954	-0,8987	0,583333	-1,53271
5	151400	0,402721	-0,90951	-0,51537	-0,6984	0,75	-1,20594
6	152000	0,403737	-0,90699	-0,51707	-0,60552	0,916667	-1,38647
7	183700	0,45421	-0,7892	-0,60552	-0,51707	1,083333	-1,41512
8	218000	0,502621	-0,68792	-0,6984	-0,51537	1,25	-1,50411
9	295000	0,5929	-0,52273	-0,8987	-0,1954	1,416667	-1,01735
10	869000	0,890494	-0,11598	-2,21178	-0,19402	1,583333	-0,49083
11	869900	0,890703	-0,11574	-2,21369	-0,18779	1,75	-0,53119
12	1573335	0,973426	-0,02693	-3,62783	-0,13443	1,916667	-0,30928
						Jumlah	**-12,5073**

Hasil Penaksiran Parameter Reliabilitas *Stress-Strength*

Dalam perhitungan taksiran reliabilitas *stress-strength* membutuhkan nilai parameter α dengan menggunakan iterasi sederhana dan hasil proses iterasi yang ke-10 dimana proses iterasi tersebut sudah konvergen dengan nilai taksiran parameter, adalah $\hat{\alpha} = 0.984607959$. Berikut perhitungan reliabilitias *stress-strength* dengan menggunakan persamaan (2.8) maka diperoleh :

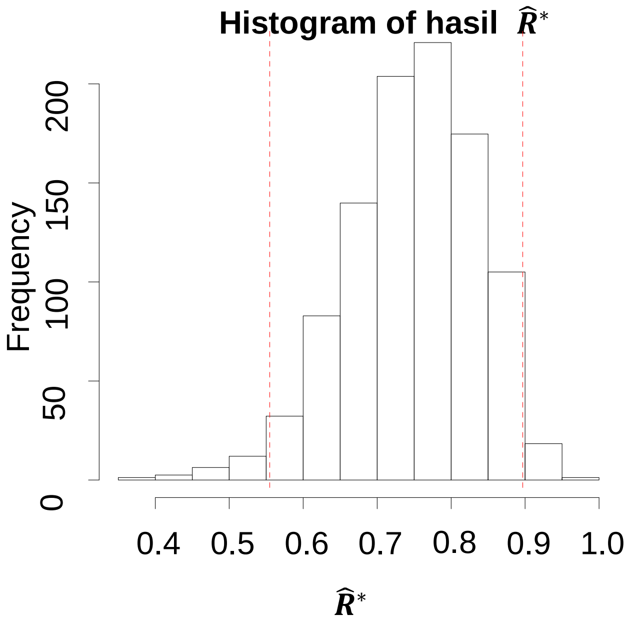
$$\hat{R} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}} + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j^{\hat{\alpha}}}$$

$$= \frac{\frac{10814093{,}5^{0.984607959}}{12}}{\frac{10814093{,}5^{0.984607959}}{12} + \frac{3644137{,}593^{0.984607959}}{12}} = 0.747954119$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa taksiran reliabilitas *stress-strength* pada data *fatigue* untuk specimen 21 mm dan 50 mm adalah 0,747954119.

Hasil Pembentukan Selang Kepercayaan dengan Bootstrap-Persentil

Berikut hasil bentuk histogram dari 1000 nilai $\hat{R}^*$ bootstrap-persentil diilustrasikan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Histogram Nilai $\hat{R}^*$ Bootstrap

Dari hasil perhitungan nilai minimum dari nilai $\hat{R}^*$ bootstrap adalah 0.3832009, sedangkan nilai maksimumnya adalah 0.9601979 dengan nilai batas bawah untuk selang kepercayaan bootstrap-persentil untuk $\hat{R}^*\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. dengan taraf arti γ = 5%, maka nila urutan persentil yang ke- $\left(\frac{0{,}05}{2}\right) \cdot = 0{,}25x1000 = 25$ yaitu 0.5545906.

Sedangkan nilai batas atas untuk selang kepercayaan bootstrap-pesentil untuk $\hat{R}^*$ $\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)$ dengan taraf nyata γ = 5%, maka nila urutan persentil yang ke-$\left(1-\frac{0,05}{2}\right) \cdot = 0,957x1000 = 975$, yaitu 0.8961282.

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan beberapa hasil penelitian sebagai berikut:

1. Berdasarkan uji kecocokan Anderson-Darling data *fatigue* untuk specimen 21 mm dan specimen 50 mm, masing-masing data specimen ini berasal dari data distribusi Weibull dengan nilai taksiran dari data *fatigue* untuk specimen 21 mm $\alpha_1 = 0.93308$ dan $\theta_1 = 1088102$ dan statistik uji Anderson-Darling 0,3474, dan nilai taksiran dari data *fatigue* untuk specimen 50 mm $\alpha_2 = 0.83361$ dan $\theta_2 = 335326$, statistik uji Anderson-Darling 0,5073 keduanya menunjukkan bahwa data data *fatigue* berasal dari populasi yang berdistribusi Weibull.
2. Hasil penaksiran paremeter reliabilitas *stress-sterngth* dengan metode *maximum likelihod estimation* (MLE), sebelum dilakukannya perhitungan taksiran reliabilitas *stress-strength*, maka terlebih dahulu dilakukan taksiran parameter α dengan iterasi sederhana, dan menghasilkan hasil nilai taksiran parameter $\hat{\alpha} = 0.984607959$, yang merupakan proses iterasi yang sudah konverge pada iterasi ke-10 dan hasil taksiran reliabilitas *stress-strength* pada data *fatigue* untuk specimen 21 mm dan specimen 50 mm adalah 0,747954119 artinya bahwa peluang *strength* melebihi *stress*.
3. Selang kepercayaan bootstrap-persentil ini menghasilkan persentil batas bawah ke-25 yaitu 0.5545906 dan persentil ke-975 batas atas yaitu 0.8961282 dengan taraf nyata γ = 5%.

E. Saran

Saran Teoritis

Hendaknya untuk penelitian *stress-strength* yang berdistribusi Weibull ini harus memiliki parameter bentuk (*shape*) yang berbeda dan parameter skala (*scale*) yang berbeda juga.

Daftar Pustaka

A. Asgharzadeh,, Reza Valiollahi dan M.Z. Raqab, "*Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples,*" pp 103-124, 2011

B. Efron, *The Jackknife, the Bootstrap and Other Re-Sampling Plans.* Philadelphia, PA:SIAM, 1982, vol.38, CBMS-NSFRegional Conference Series in Applied Mathematics.

Hogg, R.V. dan Craig, A.T. 1995, *Introduction to Mathematical Statistics, Fourth Edition, Macmillan Publishing Co., Inc.* New York.

J. I. McCool, "*Inference on P(Y < X) in the Weibull case*," Communications in Statistics—Simulation and Computations, vol. 20, pp. 129–148, 1991.

Johnson R.A., (1988) "*Stress-strength model for relialbility*" in Handbook of statistics, P.R. Krishnaiah and C.R. Rao, eds Elsevier, 27-54.

Kundu D and R. D. Gupta, " Estimation of P[$Y < X$] for Weibull Distribution" IEEE Transactions on Reliability, Vol. 55. No 2. June 2006.

M. G. Badar and A. M. Priest, "*Statistical aspects of fiber and bundle strength in hybrid composites,*" in Progressin Science and Engineering Composites, T. Hayashi, K. Kawata, and S. Umekawa, Eds., Tokyo, 1982, pp. 1129–1136, ICCM-IV.

Sales Filho, R. L. M.*,* López Droguett, E.*,* Lins, I. D.*,* Moura, M. C.*,* Amiri, M.*, and* Azevedo, R. V. (2016) *Stress-Strength Reliability Analysis with Extreme Values based on q-Exponential Distribution.* Qual. Reliab. Engng. Int.*, doi:* 10.1002/qre.2020*.*

Samuel Kotz, Yan lumelskii, M. Pensky, "The Stress-strength Model and its Generalizations Theory and aplication P(X<Y).

Shirani M, Härkegård G. *Fatigue life distribution and size effect in ductile cast iron for wind turbine components*. Engineering Failure Analysis 2011; 18:12–24.