Distribusi Rayleigh Bivariat dan Sifat-sifatnya

Wulan Jati Nuraya*, Aceng Komarudin Mutaqin

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*wulanjati12@gmail.com, aceng.k.mutaqin@gmail.com

Abstract. The Rayleigh distribution has received special respect due to the attention of many researchers because of its close relationship with important distributions which are useful in analyzing lifetime applications. The bivariate Rayleigh distribution is constructed with the univariate Rayleigh distribution as marginal. Many various methods are used to estimate the unknown parameters of the proposed distribution. The Rayleigh distribution can be derived from a bivariate normal distribution when the independent and random variables have the same variance. Rayleigh Bivariate distribution, which is well known in the field of statistical communication theory with wind wave problems, the purpose of this simulation study is about the time data carried out to study the effectiveness of the proposed bivariate Rayleigh distribution in a real application data which is analyzed for illustration purposes.

Keywords: bivariate Rayleigh distribution.

Abstrak. Distribusi Rayleigh telah menerima penghargaan khusus karena perhatian dari banyak peneliti sebab hubungannya yang erat dengan distribusi penting yang membuatnya berguna dalam menganalisis aplikasi seumur hidup. Distribusi Rayleigh bivariat adalah dibangun dengan distribusi Rayleigh univariat sebagai marjinal. Banyak berbagai metode yang digunakan untuk memperkirakan parameter yang tidak diketahui dari distribusi yang diusulkan. Distribusi Rayleigh dapat diturunkan dari distribusi normal bivariat ketika variabel independen dan acak dengan varian yang sama. distribusi Rayleigh Bivariat, yang dikenal di bidang teori komunikasi statistic dengan masalah gelombang angin, Namun tujuan studi simulasi ini adalah tentang data waktu sepakbola yang dilakukan untuk mempelajari efektivitas distribusi Rayleigh bivariat yang diusulkan dalam suatu data nyata aplikasi yang dianalisis untuk tujuan ilustrasi.

Kata Kunci: Distribusi Rayleigh bivariat.

1. Pendahuluan

Distribusi Rayleigh pertama kali diperkenalkan oleh Lord Rayleigh sebagai masalah di bidang akustik. Distribusi ini memiliki hubungan dengan distribusi penting seperti Weibull, Chi-kuadrat, dan distribusi nilai ekstrim. Penurunan fungsi hazard dari waktu adalah hal penting lainnya bagi karakteristik distribusi Rayleigh dalam aplikasi seumur hidup. Oleh karena itu, metode ini menjadi lebih berguna dalam studi fisika seperti pemrosesan sinyal dan studi tentang berbagai jenis radiasi Baharith (2017). Apalagi salah satu aplikasinya adalah model variasi kecepatan angin, Jenis analisis ini adalah digunakan untuk memperkirakan pemulihan energi dari angin turbin. Karena distribusi Rayleigh berfungsi sebagai model penting dalam teori kebisingan, ketinggian gelombang laut, pengujian senjata dan pengujian penerbangan, masuk akal untuk membangun Distribusi Rayleigh bivariat ketika distribusi marginalnya adalah Rayleigh. Akhter S A dan Hirai S A (2007).

Ada beberapa bukti bahwa tinggi dan periode dikuadratkan gelombang angin masing-masing terdistribusi Rayleigh. Jika ini masalahnya, dapat diduga bahwa distribusi bersama mereka juga dari Tipe Rayleigh. distribusi Rayleigh Bivariat, yang dikenal di bidang teori komunikasi statistik, mungkin dengan demikian berlaku untuk masalah gelombang angin. Namun, di bidang pesisir dan teknik kelautan, distribusi ini tampaknya tidak diketahui. Dalam catatan ini perhatian tertuju pada keberadaannya, dan utamanya properti terdaftar Battjes (1969).

Distribusi ini adalah juga terhubung dengan satu atau dua dimensi dan kadang-kadang disebut sebagai distribusi frekuensi "jalan acak". Distribusi Rayleigh dapat diturunkan dari distribusi normal bivariat ketika variabel independen dan acak dengan varian yang sama. Kami mencoba membangun distribusi Rayleigh bivariat dengan fungsi distribusi Rayleigh marginal dan diskusikan fundamentalnya properti. Akhter S A dan Hirai S A (2007).

Fungsi kepadatan probabilitas (Pdf) danfungsi kumulatif dari distribusi Rayleigh adalah, masing-masing, diberikan oleh $f(t) = 2\alpha t\,(-2)$, $F(\mathrm{t}) = 1\,(-2\,)$, di mana $\alpha > 0$ adalah parameter skala. Menariknya, meskipun banyak pekerjaan telah dilakukan pada univariat Rayleigh distribusi, tidak banyak pekerjaan yang telah dilakukan untuk bivariat distribusi Rayleigh. Battjes (1969). Berbagai metode konstruksi distribusi multivariat atau bivariat telah dipelajari diliteratur, Adham dan Walker menggabungkan campuran dan ide copula untuk memperkenalkan Gompertz distribusi bivariat yang dapat diperluas secara alami kedistribusi multivariat. Mereka menyimpulkan bahwa hasil distribusi bivariat mudah untuk dianalisis dan memiliki struktur ketergantungan Battjes (1969). Maka penulis memiliku tujuan untuk mempelajari efektivitas distribusi Rayleigh bivariat dalam suatu data nyata aplikasi yang dianalisis untuk tujuan ilustrasi.

2. Metodologi

Berdasarkan journal M. K. ABD Elaal dan L.A. Baharith (2017) untuk contoh kasus data bivariat Rayleigh. Data liga sepak bola Amerika diperoleh dari pertandingan dimainkan pada tahun 1986 dengan dua variabel di mana;

T_1: waktu pertandingan untuk poin pertama yang dicetak dengan tendangan bola di antara tiang gawang

T_2: waktu permainan untuk poin pertama yang dicetak dengan bergerak bola ke zona akhir

Waktu-waktu ini penting untuk mengetahui berapa lama seseorang harus menunggu untuk menonton touchdown atau ke pengamat yang tertarik hanya pada tahap awal permainan. T_1: danT_2 berkorelasi positif. Oleh karena itu, kami menggunakan bivariat Distribusi Rayleigh agar sesuai dengan data ini. M. K. ABD Elaal dan L.A. Baharith (2017)

Berikut tahapan-tahapan analisis yang digunakan M. K. ABD Elaal dan L.A. Baharith (2017) dalam penelitian sebagai berikut :

1. Menentukan parameter dari tiap masing-masing variabel
2. Melakukan uji Kolmogorov Smirnov
3. Menguji kesesuaian kopula Gaussian Melakukan identifikasi model dengan kondisi ordo
4. Memperkirakan inversi tau kendall
5. Memprediksi Bayesian yang sesuai 95% interval kredibel

3. Pembahasan dan Diskusi

Menurut Wikipedia distribusi Rayleigh diamati ketika besarnya keseluruhan vector terkait dengan komponen arahnya, contohnya ketika kecepatan angin dianalisis dalam dua dimensi. Untuk distribusi Rayleigh bivariat asumsi yang diperlukan adalah data harus kontinyu, 2 variabel acak saling bebas, variabel acak tidak boleh bernilai negatif, tidak ada missing data, tidak ada data tersensor dalam data dan memenuhi distribusi Rayleigh bivariat.

Fungsi Densitas

Fungsi densitas distribusi Rayleigh bivariat (Bahari dkk., 2020) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(x,y;\lambda) = \begin{cases} 4\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)xye^{-\lambda_1x^2-(\lambda_2+\lambda_3)y^2} & ; 0 < x < y \\ 4\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)xye^{-\lambda_2y^2-(\lambda_1+\lambda_3)x^2} & ; x > y > 0 \\ 2\lambda_3ze^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)z^2} & ;\ x = y = z \end{cases} \quad \ldots(2.1)$$

dimana $\boldsymbol{\lambda^T} = (\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \boldsymbol{\lambda_3})$ adalah vektor parameter yang tidak diketahui dari distribusi Rayleight bivariat. Pembuktian bahwa fungsi di atas adalah fungsi densitas adalah penurunan integral dari tiap - tiap fungsi diatas harus sama dengan satu. Fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Rayleight bivariat berdasarkan journal Dina dkk, 2013 dan Jafari dkk, 2014 adalah

$$F(x,y;\lambda) = P(X \le x, Y \le y) = \int_0^y \int_0^x f(s,t;\lambda) ds dt. \quad \dots(2.2)$$

Untuk menyelesaikan integral di atas, ada 3 kasus, yaitu (1) untuk $\boldsymbol{x > y}$; (2) untuk $\boldsymbol{x < y}$; dan (3) untuk $\boldsymbol{x = y}$.

Kasus (1) untuk $\boldsymbol{x > y}$:

$$\begin{aligned} F(x,y;\lambda) &= P(X \le x, Y \le y) \quad \dots(2.3) \\ &= \left(1 - e^{-(\lambda_2+\lambda_3)y^2}\right) - \frac{(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y^2}\right) \\ &\quad + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y^2}\right) - e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x^2}\left(1 - e^{-\lambda_2 y^2}\right) \\ &\quad + \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y^2}\right). \end{aligned}$$

Kasus (2) untuk $\boldsymbol{x < y}$:

$$\begin{aligned} F(x,y;\lambda) &= P(X \le x, Y \le y) \quad \dots(2.4) \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2}\right) - e^{-(\lambda_2+\lambda_3)y^2}\left(1 - e^{-\lambda_1 x^2}\right) \\ &\quad + \left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x^2}\right) - \frac{(\lambda_1+\lambda_3)}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2}\right) \\ &\quad + \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2}\right). \end{aligned}$$

Kasus (3) untuk $\boldsymbol{x = y}$:

$$\begin{aligned} F(x,y;\lambda) &= P(X \le x, Y \le y) \\ &= \left(1 - e^{-(\lambda_2+\lambda_3)y^2}\right) - \frac{(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y^2}\right) \quad \dots(2.5) \\ &\quad + \left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x^2}\right) - \frac{(\lambda_1+\lambda_3)}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2}\right) \\ &\quad + \frac{\lambda_3}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2}\right). \end{aligned}$$

Fungsi Distribusi Kumulatif

Fungsi densitas peluang dan fungsi distribusi kumulatif marginal untuk peubah acak $\boldsymbol{X}$ masing-masing adalah

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty f(x,y) dy \quad \dots(2.6) \\ &= \int_x^\infty 4\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)xye^{-\lambda_1 x^2-(\lambda_2+\lambda_3)y^2} dy \\ &\quad + \int_0^x 4\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)xye^{-\lambda_2 y^2-(\lambda_1+\lambda_3)x^2} dy \\ &\quad + 2\lambda_3 xe^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2} = 2(\lambda_1+\lambda_3)xe^{-(\lambda_1+\lambda_3)x^2} \ ; x > 0, \end{aligned}$$

dan

$$F(x) = \int_0^x 2(\lambda_1+\lambda_3)te^{-(\lambda_1+\lambda_3)t^2} dt = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x^2} \ ; x > 0. \quad \dots(2.7)$$

Fungsi densitas peluang dan fungsi distribusi kumulatif marginal untuk peubah acak $\boldsymbol{Y}$ masing-masing adalah

$$f(y)=\int_0^\infty f(x,y)dx \qquad \ldots(2.8)$$
$$=\int_0^y 4\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)xye^{-\lambda_1x^2-(\lambda_2+\lambda_3)y^2}dx$$
$$+\int_y^\infty 4\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)xye^{-\lambda_2y^2-(\lambda_1+\lambda_3)x^2}dx$$
$$+2\lambda_3ye^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y^2}=2(\lambda_2+\lambda_3)ye^{-(\lambda_2+\lambda_3)y^2}\ ;y>0,$$

dan

$$F(y)=\int_0^y 2(\lambda_2+\lambda_3)te^{-(\lambda_2+\lambda_3)t^2}dt=1-e^{-(\lambda_2+\lambda_3)y^2}\ ;y>0. \qquad \ldots(2.9)$$

Distribusi Marginal dan Bersyarat

Fungsi densitas peluang $\boldsymbol{Y}$ bersyarat $\boldsymbol{X}$ dan fungsi distribusi kumulatifnya berdasarkan journal Dina dkk 2013 adalah

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{2\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1+\lambda_3)}ye^{\lambda_3x^2-(\lambda_2+\lambda_3)y^2} & ;0<x<y\\ 2\lambda_2ye^{-\lambda_2y^2} & ;x>y>0\\ \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}e^{-\lambda_2y^2} & ;x=y,\end{cases} \qquad \ldots(2.10)$$

dan

$$F(y|x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_2y^2} & ;y<x\\ 1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3}e^{-\lambda_2x^2} & ;y=x\\ 1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3}e^{-\lambda_2x^2-(\lambda_2+\lambda_3)y^2} & ;y>x.\end{cases} \qquad \ldots(2.11)$$

Fungsi densitas peluang $\boldsymbol{X}$ bersyarat $\boldsymbol{Y}$ dan fungsi distribusi kumulatifnya masingmasing adalah

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\begin{cases}2\lambda_1xe^{-\lambda_1x^2} & ;0<x<y\\ \dfrac{2\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}{(\lambda_2+\lambda_3)}xe^{\lambda_3y^2-(\lambda_1+\lambda_3)x^2} & ;x>y>0\\ \dfrac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}e^{-\lambda_1x^2} & ;x=y,\end{cases} \qquad \ldots(2.12)$$

dan

$$F(x|y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1x^2} & ;x<y\\ 1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}e^{-\lambda_1y^2} & ;x=y\\ 1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}e^{-\lambda_3y^2-(\lambda_1+\lambda_3)x^2} & ;x>y.\end{cases} \qquad \ldots(2.13)$$

Penaksiran Kemungkinan Maksimum untuk Distribusi Rayleigh Bivariat

Metode Kemungkinan Maksimum adalah menduga parameter distribusi yang memaksimumkan fungsi likelihood. Oleh karena itu, dalam kasus data lengkap ini, fungsi *likelihood*-nya berdasarkan journal Bahari, dkk. 2020 adalah:

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^n f(x_i,y_i;\lambda)=\prod_{I_1} f_1(x_i,y_i;\lambda)\prod_{I_2} f_2(x_i,y_i;\lambda)\prod_{I_3} f_3(z_i;\lambda) \qquad \ldots(2.14)$$

dimana $\boldsymbol{n}$ adalah ukuran sampel (banyaknya pertandingan), $\boldsymbol{I_1}=\{(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{y_i}):\ \boldsymbol{x_i}<\boldsymbol{y_i},\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\ldots,\boldsymbol{n}\},\boldsymbol{I_2}=\{(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{y_i}):\ \boldsymbol{x_i}>\ \boldsymbol{y_i},\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\ldots,\boldsymbol{n}\}$, dan $\boldsymbol{I_3}=\{(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{y_i}):\ \boldsymbol{x_i}=\ \boldsymbol{y_i},\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\ldots,\boldsymbol{n}\}$. Oleh Karena itu, dalam kasus data lengkap, kita perlu mempertimbangkan fungsi log-likelihood, $\boldsymbol{l(\lambda)}$, kemudian menurunkan fungsi log-likelihood (Bahari, dkk. 2020) tersebut terhadap $\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}$ dan $\boldsymbol{\lambda_3}$ sehingga menghasilkan tiga persamaan berikut:

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda_1} = \frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n_2}{\lambda_1 + \lambda_3} - \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2, \qquad \ldots(2.15)$$
$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda_2} = \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{n_2}{\lambda_2} - \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2,$$
$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda_3} = \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{n_2}{\lambda_1 + \lambda_3} + \frac{n_3}{\lambda_3} - \sum_{i=1}^{n} \max(x_i, y_i)^2$$

Dalam persamaan di atas, $\boldsymbol{n_1}$ adalah banyaknya pengamatan untuk $\boldsymbol{x_i} < \boldsymbol{y_i}$, $\boldsymbol{n_2}$ adalah banyaknya pengamatan untuk $\boldsymbol{x_i} > \boldsymbol{y_i}$, dan $\boldsymbol{n_3}$ adalah banyaknya pengamatan untuk $\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{y_i}$. (Bahari, dkk. 2020)**.**Tidak ada solusi analitik untuk penaksir kemungkinan maksimum untuk parameter distribusi Rayleigh bivariat. Penaksir kemungkinan maksimumnya dapat diperoleh secara numerik menggunakan metode iterasi Newton-Rapshon. Untuk melakukan metode iterasi Newton-Raphson, berdasarkan journal(Bahari, dkk. 2020) dibutuhkan turunan kedua dari fungsi log-likelihood-nya, yaitu:

$$\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial {\lambda_1}^2} = -\frac{n_1}{{\lambda_1}^2} - \frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2} \qquad \ldots(2.16)$$
$$\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial {\lambda_2}^2} = -\frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{n_2}{{\lambda_2}^2}$$
$$\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial {\lambda_3}^2} = -\frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2} - \frac{n_3}{{\lambda_3}^2}$$
$$\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = \frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} = 0$$
$$\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3} = \frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_1} = -\frac{n_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}$$
$$\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3} = \frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_2} = -\frac{n_1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2}$$

Solusi numerik untuk nilai taksiran parameter $\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}$ dan $\boldsymbol{\lambda_3}$ didasarkan pada persamaan iterasi di bawah ini:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ \lambda_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k-1} \\ \lambda_2^{k-1} \\ \lambda_3^{k-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial {\lambda_1}^2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} & \left.\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} & \left.\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} \\ \left.\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} & \left.\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial {\lambda_2}^2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} & \left.\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} \\ \left.\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_1}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} & \left.\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} & \left.\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial {\lambda_3}^2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda_1}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} \\ \left.\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} \\ \left.\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda_3}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_1^{k-1}\\ \lambda_2=\lambda_2^{k-1}\\ \lambda_3=\lambda_3^{k-1}}} \end{pmatrix}; k = 1,2, \ldots \qquad \ldots(2.17)$$

Proses iterasi dihentikan ketika nilai taksiran yang diperoleh sudah konvergen atau $\sqrt{\left(\boldsymbol{\lambda_1^k} - \boldsymbol{\lambda_1^{k-1}}\right)^2 + \left(\boldsymbol{\lambda_2^k} - \boldsymbol{\lambda_2^{k-1}}\right)^2 + \left(\boldsymbol{\lambda_3^k} - \boldsymbol{\lambda_3^{k-1}}\right)^2} < \boldsymbol{\varepsilon}$, dimana nilai $\boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan toleransi kesalahan (misal $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-6}}$) berdasarkan journal Bedar, E Radwan (2017). Nilai taksiran parameter $\boldsymbol{\lambda_1}$ dan $\boldsymbol{\lambda_2}$ menggunakan metode penaksiran kemungkinan maksimum untuk distribusi Rayleigh univariat dari data untuk peubah acak $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{Y}$ dapat digunakan sebagai nilai awal untuk persamaan iterasi di atas. Sedangkan nilai awal untuk $\boldsymbol{\lambda_3}$ dapat menggunakan rata-rata dari dua nilai awal di atas untuk $\boldsymbol{\lambda_1}$ dan $\boldsymbol{\lambda_2}$.

Untuk contoh kasus data distribusi Rayleigh bivariat diambil berdasarkan journal M. K. ABD Elaal dan L. A. Baharith (2017) bahwa marginal diuji menggunakan Kolmogorov-Smirnov (KS) dihitung secara secara terpisah. Tes KS nilai dan nilai p terkait (dilaporkan dalam tanda kurung) untuk T_1 dan T_2 adalah 0,1419 (0,3666) dan 0,1525 (0,2557), yang menunjukkan bahwa distribusi Rayleigh bivariat memberikan kecocokan yang sesuai untuk data bivariat ini.

Selain itu, uji kecocokan dilakukan untuk menguji kesesuaian kopula Gaussian untuk dataset ini berdasarkan statistik yang menunjukkan sesuai dengan(nilai $p > 0,05$). Parameter copula diperkirakan melalui inversi tau Kendall menjadi 0,88 yang dapat digunakan sebagai nilai awal saat memasang bivariat Rayleigh distribusi. Perkiraan Bayesian dan interval kredibel terkait dari parameter Rayleigh bivariat dilaporkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Perkiraan Bayesian dan yang sesuai 95% interval kredibel parameter Rayleigh bivariat.

Parameter estimasi		95% Interval Kredibel	
		2,5 %	97,5%
$\hat{\alpha}_1$	5,8499	6.3849	6.0015
$\hat{\alpha}_2$	7,8001	8.5132	8.0021
$\hat{\rho}$	0,6858	0.6208	0.7431

4. Kesimpulan

Dalam Artikel ini, peran uji Kolmogorov Smirnov sebagai alat ukur untuk menguji kecocokan data terhadap distribusi Rayleigh bivariat terbukti sangat efektif. Studi simulasi dan data nyata aplikasi menunjukkan fleksibilitas bivariat yang diusulkan distribusi Rayleigh. Ini juga memberikan kecocokan yang cocok untuk data. Berdasarkan estimasi maksimum likelihood, diperoleh nilai awal masing-masing parameter dengan memanfaatkan metode Numerik yaitu metode Newton Rhapson untuk penyelesaiannya.

Acknowledge

Penelitian ini dapat terlaksana dengan baik berkat bantuan dari berbagai pihak, maka dari itu penulis mengucapkan rasa terima kasih.

Daftar Pustaka

[1] Akhter S A dan Hirai S A. (2007). *Bivariate Rayleigh Distribution and its Properties*. Institute of Statistics University of the Punjab Q.A. Campus, Lahore

[2] Bahari, F., Safari & Motjaba. (2020). Reliability of soccer player based on the bivariate Rayleigh distribution with right censored and ignorabble missing data. *Journal of Applied Statistic*, 48(2), 1-15

[3] Baharith dan M. K. ABD Elaal. (2017). Bivariate Rayleigh with application. *International Journal of Electronics Communication and Computer Engineering*.

[4] Battjes, J A. (1969). *Facts And Figures Pertaining To The Bivariate Rayleigh Distribution*. Dept. of Civil Engineering Delft University of Technology ,The Netherlands.

[5] Bedar, E Radwan. (2017). Parameter Estimation of The Bivariate Weibull Distribution by EM Algorithma Based on Censored Samples. *Asian Journal of Applied Sciences*, Volume 05 issue 06.

[6] Dina H. dan Abdel-Hady (2013). Bivariate Generalized Rayleigh Distribution. Journal of Applied Sciences Research.

[7] Jafari, A., Pak A., dan Khoolenjani B.N. (2014). Inference on P(Y < X) in Bivariate Rayleigh Distribution. journal Mathematic.

[8] Rahmadani Riani Shifa, Suliadi. (2021). *Faktor Koreksi Diagram Kendali Shewhart pada Situasi Unconditional ARL dan Penerapannya terhadap Data Brix (Kekentalan) Saus*. Jurnal Riset Statistika, 1(1), 28-34.