Model Hubungan Fungsional Sirkular Arah Angin Kota Bandung dan Kota Garut dengan Sisaan Berdistribusi *Wrapped Cauchy*

Diyanah Maisarah*, Suwanda

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*diyanahmaisarah8@gmail.com, suwanda@unisba.ac.id

Abstract. Analysis Regression interd to explain or model the relationship in variables. Where there is variable Y as the response variable, dependent or explained, and variable X as the predictor, independent, or explanatory variable. In the regression model, the error is assumed to be in the response variable only. However, if the error is assumed to be in the variables "X" and "Y", it is called a functional relationship model (Error-in-Variables Model/EIVM). This study extends a simple linear regression model with a residual with a Wrapped Cauchy distribution in functional terms when both variables are subjected to Wrapped Cauchy errors (Abuzaid, et all. 2018). The data used is wind direction data in Bandung City and Garut City, where the independent variable is the wind direction in Garut City while the dependent variable is the wind direction in Bandung City. Parameter estimation is obtained by using the maximum likelihood estimation method using a re-weighting iteration algorithm while the sampling variances of the model parameters are obtained via bootstrapping methods and consequently the confidence intervals were constructed.

Keywords: Boostrap, EIVM, Wind Direction, Distribusi Wrapped Cauchy.

Abstrak. Analisis regresi bertujuan untuk menjelaskan atau memodelkan hubungan antar variabel. Di mana terdapat variabel Y sebagai variabel respons, takbebas atau yang dijelaskan, dan variabel X sebagai variabel predictor, bebas, atau penjelas. Dalam model regresi kekeliruan diasumsikan berada pada variabel respon saja. Namun, jika kekeliruan diasumsikan berada pada variabel "X" dan "Y", maka disebut model hubungan fungsional (Error-in-Variables Model/EIVM). Penelitian ini memperluas model regresi linier sederhana dengan sisaan berdistribusi Wrapped Cauchy secara fungsional ketika kedua variabel memiliki sisaan berdistribusi Wrapped Cauchy (Abuzaid, dkk. 2018). Data yang digunakan adalah data arah angin di Kota Bandung dan Kota Garut, di mana peubah bebas adalah arah angin di Kota Garut sedangkan peubah takbebas adalah arah angin di Kota Bandung. Estimasi parameter diperoleh dengan menggunakan metode estimasi kemungkinan maksimum menggunakan algoritma iterasi re-weighting sedangkan varians dari parameter model diperoleh melalui metode bootstrap kemudian selang kepercayaan dibuat.

Kata Kunci: ***Boostrap, EIVM,*** **Arah Angin, Distribusi** ***Wrapped Cauchy*****.**

1. Pendahuluan

Ilustrasi data sikrular sebagai contoh salah satunya arah angin. Akuisisi data kecepatan angin dan arah angin dibutuhkan demi mendapatkan data yang akan dipakai dalam berbagai sektor kehidupan. Para statististikawan maupun peneliti dari bidang ilmu yang lain banyak yang meneliti hal seperti ini yang berhubungan dengan data sirkular khususnya aplikasi pada analisis data arah angin. Salah satunya memperluas model regresi linier sederhana dengan sisaan berdistribusi Wrapped Cauchy secara fungsional ketika kedua variabbel mengalami sisaan berdistribusi Wrapped Cauchy.

Model hubungan fungsional adalah bagian dari kelas umum Error-In-Variables Model (EIVM) yang juga dikenal sebagai pengukuran sisaan atau model regresi acak. Studi tentang EIVM pertama kali dieksplorasi oleh (Adcock dalam Abuzaid, dkk. 2018) dan kemudian (Kendall dalam Abuzaid, dkk. 2018) secara formal membuat perbedaan antara hubungan fungsional dan struktural antara kedua variabel. Dalam regresi biasa kita berasumsi bahwa variabel penjelas diukur tanpa kekeliruan dan semua kekeliruan ada dalam variabel respons, tetapi EIVM mengasumsikan bahwa kekeliruan ada pada variabel respons dan variabel penjelas. Oleh karena itu, tidak ada perbedaan antara variabel respons dan variabel penjelas. Pada penelitian lain ada yang memodelkan data sirkular untuk regresi sirkular sederhana dengan sisaan berdistribusi Wrapped Cauchy yang kekeliruannya hanya pada satu variabel saja, tetapi pada penelitian ini seperti yang diuraikan di atas akan memodelkan model lain untuk data sirkular yaitu model hubungan fungsional sirkular dengan sisaan berdistribusi Wrapped Cauchy yang kekeliruan ada pada variabel respons dan variabel penjelas.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka perumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut : " Bagaimana menaksir parameter model hubungan fungsional dan bagaimana mengaplikasikan model hubungan fungsional untuk data sirkular dengan asumsi sisaan kedua peubah berdistribusi Wrapped Cauchy pada arah angin di Kota Bandung dan di Kota Garut ?". Selanjutnya tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Untuk menaksir parameter model hubungan fungsional untuk data sirkular dengan asumsi sisaan kedua peubah berdistribusi Wrapped Cauchy.
2. Untuk mengaplikasikan model hubungan fungsional untuk data sirkular dengan asumsi sisaan kedua peubah berdistribusi Wrapped Cauchy, pada arah angin di Kota Bandung dan di Kota Garut.

2. Metodologi

Model regresi linier sederhana untuk variabel sirkular yang di usulkan (Abuzaid dan Allaham dalam Abuzaid, dkk. 2018) sebagai berikut :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \ (mod\ 2\pi), \qquad ...(1)$$

Di mana ε_i sisaan acak sirkular berdistribusi Wrapped Cauchy dengan rata-rata 0 parameter konsentrasi. Estimasi parameter yang diperoleh ρ berdasarkan pada mememaksimumkan fungsi log-kemungkinan melalui prosedur iteratif.

Model regresi linier sederhana untuk variabel sirkular pada persamaan (1) digunakan untuk memperluas secara fungsional, di mana hubungannya linier. Situasi seperti itu dapat ditemukan dalam kalibrasi antara dua instrumen untuk mengukur variabel sirkular.

Misalkan x_i dan y_i untuk *i =1,2,..., n* di mana $0 < x_i, y_i \leq 2\pi$ adalah nilai yang diamati dari nilai variabel sirkular X dan Y masing-masing. Diasumsikan terdapat hubungan linear antara kedua variabel tersebut dengan parameter *slope* yang diketahui sama dengan satu. Untuk apapun itu nilai X_i *dan* Y_i tetap , bahwa pengamatan x_i dan y_i diukur dengan kekeliruan δi dan εi masing-masing, dan dengan demikian model lengkap dapat ditulis sebagai berikut :

$$x_i = X_i + \delta_i\ , dan\ y_i = Y_i + \varepsilon_i$$
$$Yi = \alpha + Xi\ (mod\ 2\pi), \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}, \qquad ...(2)$$

Asumsi bahwa δ_i dan ε_i didistribusikan secara independen dengan distribusi Wrapped Cauchy dengan rata-rata nol dan parameter konsentrasi ρ dan κ, masing-masing itu artinya , $\delta i \sim WC(0, \rho)$ *dan* $\varepsilon i \sim WC(0,\kappa)$. Didefiniskan juga $\lambda = \frac{\rho}{\kappa}$ *(i.e.* $\rho = \lambda\kappa$ *)* sebagai rasio sisaan parameter konsentrasi yang diketahui untuk model hubungan fungsional sirkular.

Dalam konteks model hubungan fungsional ini ada alasan kuat untuk memperbaiki $\beta = 1$, alasan pertama terkait dengan kesimetrian model hubungan fungsional yang diinginkan, di mana kesimpulan harus independen dari kuantitas mana yang dipilih X atau Y. Selanjutnya, fungsi $X \rightarrow \beta X + \alpha$ tidak berubah terus menerus ketika dari 2π ke 0.

1. Estimasi Parameter

   Dengan asumsi persamaan sisaan parameter konsentrasi, yaitu i.e $\lambda = 1$ adalah (*n* + 2), parameter yang akan diestimasi adalah α , κ dan X_i untuk *i= 1,2,..., n* . Estimasi kemungkinan maksimum sebagai berikut :

$$\frac{\partial\, logl}{\partial \eta_1} = \frac{1}{c}\sum w_i(\cos{(y_i - X_i)} - \alpha_1) = 0$$

di mana $w_i = \frac{1}{1-\alpha_1 \cos(y_i - X_i) - \alpha_2 \sin{(y_i - X_i)}}$ ...(3)

Estimasi dari α menggunakan persamaan sebagai berikut:

$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cos{(y_i - \hat{X}_i)}}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$ dan $\hat{\alpha}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\ \sin{(y_i - \hat{X}_i)}}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$ ...(4)

Dari definisi α_1 dan α_2 didapatkan tan $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}$, kemudian estimasi α adalah $\hat{\alpha} = tan^{-1}\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}\right)$ yang dapat diperluas kebentuk sebagai berikut :

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} tan^{-1}\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}\right), jika\ \hat{\alpha}_1 > 0, \hat{\alpha}_2 > 0 \\ tan^{-1}\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}\right) + \pi, jika\ \hat{\alpha}_1 < 0 \\ tan^{-1}\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}\right) + 2\pi,\ \ jika\ \hat{\alpha}_1 > 0, \hat{\alpha}_2 < 0 \\ tak\ terdefinisi\ , jika\ \hat{\alpha}_1 = 0, \hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases} \quad ...(5)$$

Estimasi dari κ

Dapat diperoleh dari rumus matematika sebagai berikut :

$$\hat{\kappa} = \frac{1 - \sqrt{1 - \hat{\alpha}_1{}^2 - \hat{\alpha}_2{}^2}}{\sqrt{\hat{\alpha}_1{}^2 + \hat{\alpha}_2{}^2}} \quad ...(6)$$

Estimasi $dari\ X_i$

Dapat diperoleh dari persamaan seperti berikut :

$$\hat{X}_i = \hat{X}_{i0} + \frac{(\frac{2\kappa}{1+\kappa^2})\sum m_i \sin(\hat{X}_{io} - x_i) - \frac{1}{c}\sum w_i[\hat{\eta}_1 \sin(y_i - \hat{X}_{i0}) - \hat{\eta}_2 \cos(y_i - \hat{X}_{i0})]}{(\frac{2\kappa}{1+\kappa^2})\sum m_i \cos(\hat{X}_{io} - x_i) - \frac{1}{c}\sum w_i[\hat{\eta}_1 \cos(y_i - \hat{X}_{i0}) - \hat{\eta}_2 \sin(y_i - \hat{X}_{i0})]} \quad ...(7)$$

Inisial awal yang mungkin untuk iterasi adalah $\hat{X}_{i0} = x_i$ di dalam persamaan (7) untuk *i = 1,2,...,n.* Algoritma iterasi *re-weighting* untuk estimasi kemungkinan maksimum diperoleh langkah demi langkah sebagai berikut :

Langkah 1: inisialisasi $\alpha_1{}^{[0]}, \alpha_2{}^{[0]}$ dan $\hat{X}_{i0} = x_i$ dengan $\alpha_1{}^{[0]} + \alpha_2{}^{[0]} < 1$ dan hitung $w^{[0]}$ menggunakan $w_i = \frac{1}{1-\alpha_1 \cos(y_i - X_i) - \alpha_2 \sin{(y_i - X_i)}}$ pada persamaan (3)

Langkah 2: Diketahui $\alpha_1{}^{[\kappa]}, \alpha_2{}^{[\kappa]}, X^{[\kappa]}$ dan $w^{[\kappa]}$pada iterasi *κ*, hitung $\alpha_1{}^{[\kappa+1]}$, $\alpha_2{}^{[\kappa+1]}$ dan $X^{[\kappa+1]}$ menggunakan persamaan (4) dan (7), masing-masing.

Langkah 3 : Ulangi langkah 2 sampai algoritma konvergen.

Langkah 4 : Nilai $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\kappa}$ didapatkan dari persamaan (5) dan (6) masing-masing.

2. Varians Asimptotik dan Selang Kepercayaan dari Parameter Model Hubungan Fungsional Sirkular

Sulitnya untuk mendapatkan varians pengambilan sampel berdasarkan ekspektasi turunan parsial kedua dari fungsi log-kemungkinan dari model yang diusulkan dalam (2). Oleh karena itu, digunakan metode *bootstrap* (Chernick dalam Abuzaid, dkk. 2018) untuk selang kepercayaan tersebut metode persentil atau *bootstrap-p* digunakan untuk membuat selang kepercayaan 100 (1 - *a*)% untuk estimasi parameter, maka keduanya didapatkan dari yang dijelaskan di bawah ini :

Untuk setiap *n* pasang pengamatan sirkular $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n,} y_n)$ dari dua variabel sirkular X dan Y dengan hubungan linier.

Langkah 1 : Pilih *m* pasang pengamatan dari sampel secara acak sehingga (*m<n).*

Langkah *2 :* Untuk pengamatan m yang dipilih, hitung estimasi dari α dan κ dan beri label $\hat{\alpha}_1\ dan\ \hat{\kappa}_1$ seperti dalam persamaan (5) dan (6).

Langkah 3 : Langkah 3 : Ulangi Langkah 1 dan Langkah 2, B kali.

Langkah 4 : Untuk varians dapatkan varians untuk parameter $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\kappa}$ sebagai berikut:

$var(\hat{\alpha}) = \frac{1}{B-1}\sum_{j=1}^{B}(\hat{\alpha}_j - \bar{\alpha})^2$ dan $var(\hat{\kappa}) = \frac{1}{B-1}\sum_{j=1}^{B}(\hat{\kappa}_j - \bar{\kappa})^2$ ...(8)

Di mana $\bar{\alpha}$ dan $\bar{\kappa}$ adalah sampel rata-rata dari $\hat{\alpha}_j$ dan $\hat{\kappa}_j$ masing-masing untuk j=1,...,B. Untuk selang kepercayaan Atur estimasi *bootstrap* dalam urutan terkecil ke terbesar $\hat{\alpha}_{(1)}, \dots, \hat{\alpha}_{(B)}$ dan $\hat{\kappa}_{(1)}, \dots, \hat{\kappa}_{(B)}$, kemudian hitung selang kepercayaan (1 - a)% untuk α dan κ diperoleh sebagai berikut:

$\left(\hat{\alpha}_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \hat{\alpha}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) dan \left(\hat{\kappa}_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \hat{\kappa}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$, masing-masing. ...(9)

3. Pembahasan dan Diskusi

Data yang digunakan untuk mengaplikasikan metode dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari website *meteoblue.com*. Data yang diambil adalah data arah angin di Kota Bandung dan Kota Garut tahun 2020. Data tersebut merupakan data perjam yang dihitung selama 8 hari, yakni dari tanggal 5 Agustus sampai 12 Agustus 2020, di mana peubah takbebas (variabel Y) merupakan data arah angin di Kota Bandung sedangkan peubah bebasnya (variabel X) merupakan data arah angin di Kota Garut.

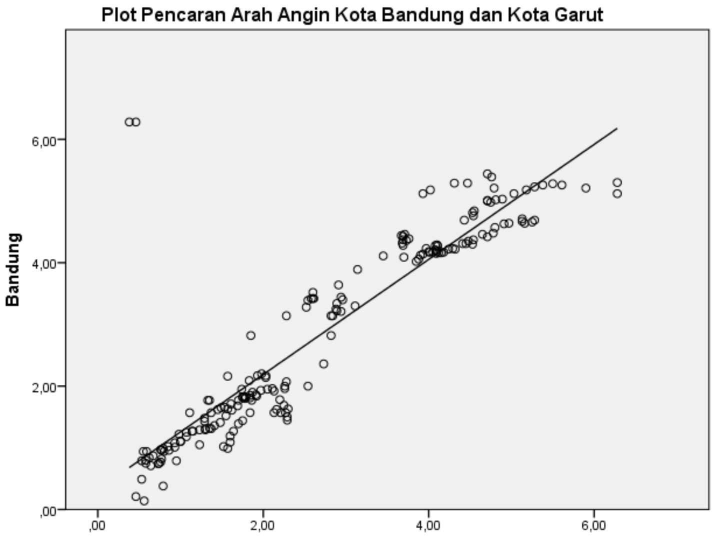
Deskripsi Data

Sebanyak 192 data tersebut dihitung menggunakkan *software* SPSS dan didapatkan hasil seperti pada tabel berikut:

Tabel 1. Hasil Statistik Deskriptif Arah Angin di Kota Bandung dan Kota Garut

Variable	Mean	StDev	Minimum	Maximum
Bandung	2,84 rad	1,60 rad	0,14 rad	6,28 rad
Garut	2,70 rad	1,54 rad	0,38 rad	6,28 rad

Hasil tabel statistik deskriptif di atas dapat menunjukan bahwa rata-rata arah angin untuk Kota Bandung sebesar 2,84 radian dan Kota Garut sebesar 2,70 radian. Simpangan baku untuk arah angin Kota Bandung sebesar 1,60 radian, sedangkan arah angin untuk Kota Garut sebesar 1,54 radian. Adapun nilai minimum arah angin untuk Kota Bandung sebesar 0,14 radian dan nilai minimum untuk arah angin Kota Garut sebesar 0,38 radian, sedangkan untuk nilai maksimum dari kedua arah angin kota baik Kota Bandung maupun Kota Garut sama yakni sebesar 6,28 radian. Adapun hasil dalam bentuk plot dari data tersebut seperti gambar berikut ini:



Gambar 1. Plot Pencaran Arah Angin Kota Bandung dan Kota Garut

Hasil plot pencaran pencaran pada 192 data dalam radian di atas menunjukan hasilnya cukup linier. Maka perhitungan pun digunakan sebanyak 192 data tersebut.

1. Estimasi Parameter
   Estimasi Parameter Model Hubungan Fungsional Sirkular seperti yang dijelaskan sebelumnya dilakukan menggunakan metode estimasi kemungkinan maksimum menggunakan algoritma iterasi *re-weighting.* Dalam pengerjaannya digunakan *software* RStudio, di mana dari hasil perhitungan yang diperoleh dari program nantinya diperoleh nilai estimasi parameter, varians asimptotik dan selang kepercayaan. Pada langkah awal dibutuhkan nilai iterasi pertama maka pengambilannya dilakukan dengan inisialisasi awal pada α_1, α_2 dan $\hat{X}_{i0}$. Kemudian menghitung nilai w_i menggunakan persamaan (1) sebagai berikut:

$$w_1 = \frac{1}{1-\alpha_1\cos(y_{i-}X_i)-\alpha_2\sin(y_i-X_i)}$$

$$= \frac{1}{1-0{,}3\cos(0{,}71-0{,}64)-0{,}3\sin(0{,}71-0{,}64)} = 1{,}47113$$

Perhitungan w_i dilakukan dari $w_1, w_2, \dots, w_{192.}$ Nilai w_i dihitung sampai dengan iterasi yang telah diperoleh yaitu sampai iterasi ke 16.

Kemudian mengitung nilai $\hat{\alpha}_1{}^{[\kappa+1]}$ dan $\hat{\alpha}_2{}^{[\kappa+1]}$ menggunakan persamaan (4) sebagai berikut:

$$\hat{\alpha}_1{}^{[1]} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\cos(y_i-\hat{X}_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{1{,}47113\cos(0{,}71-0{,}64)+\cdots+1{,}49504\cos(2{,}14-2{,}03)}{1{,}47113+\cdots+1{,}49504} = 0{,}91723$$

$$\hat{\alpha}_2{}^{[1]} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\ \sin(y_i-\hat{X}_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{1{,}47113\sin(0{,}71-0{,}64)+\cdots+1{,}49504\sin(2{,}14-2{,}03)}{1{,}47113+\cdots+1{,}49504} = 0{,}11855$$

Perhitungan $\hat{\alpha}_1$ dan $\hat{\alpha}_2$ diulangi sampai dengan nilai tersebut konvergen pada iterasi ke-16. Dari hasil nilai $\hat{\alpha}_1$ dan $\hat{\alpha}_2$ yang diperoleh konvergen pada iterasi ke-16 dengan nilai nilai $\hat{\alpha}_1$ sebesar 0,97643 dan $\hat{\alpha}_2$ 0,08457.

Kemudian dilanjutkan mengitung $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\kappa}$ dengan menggunakan persamaan (4) dan (5). Pada perhitungan untuk $\hat{\alpha}$ ada syarat tertentu sebagai berikut:

$$\hat{\alpha} = \left\{\begin{array}{c} tan^{-1}\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}\right), jika\ \hat{\alpha}_1 > 0, \hat{\alpha}_2 > 0 \\ tan^{-1}\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}\right) + \pi, jika\ \hat{\alpha}_1 < 0 \\ tan^{-1}\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}\right) + 2\pi,\ \ jika\ \hat{\alpha}_1 > 0, \hat{\alpha}_2 < 0 \\ tak\ terdefinisi\ , jika\ \hat{\alpha}_1 = 0, \hat{\alpha}_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Karena hasil dari perhitungan nilai $\hat{\alpha}_1$ dan $\hat{\alpha}_2$ yang konvergen pada iteras-ke 16 > 0 maka bentuk yang digunakan pada syarat pertama yakni $tan^{-1}\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}\right), jika\ \hat{\alpha}_1 > 0, \hat{\alpha}_2 > 0$

$$\hat{\alpha} = tan^{-1}\left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1}\right) = tan^{-1}\left(\frac{0{,}08457}{0{,}97643}\right) = 0{,}0863$$

Kemudian menghitung $\hat{\kappa}$

$$\hat{\kappa} = \frac{1-\sqrt{1-\hat{\alpha}_1{}^2-\hat{\alpha}_2{}^2}}{\sqrt{\hat{\alpha}_1{}^2+\hat{\alpha}_2{}^2}} = \frac{1-\sqrt{1-0{,}97643^2-0{,}08457^2}}{\sqrt{0{,}97643^2+0{,}08457^2}} = 0{,}8280$$

Nilai yang didapat dari estimasi parameter model hubungan fungsional sirkular yakni $\hat{\alpha}$ sebesar 0,0863 dan $\hat{\kappa}$ sebesar 0,8280. Maka dari itu model yang didapat untuk persamaan (2) adalah $Yi\ =\ 0{,}0863 +\ Xi$. Misalkan arah angin Kota Garut diperoleh sebesar 180^odalam radian sebesar 3,14, maka diprediksi arah angin Kota Bandung naik sebesar X_i.

Adapun model dari regresi linier sirkularnya pada persamaan (1) sebagai berikut:

$$\hat{y}_i = 0{,}094 + 0{,}996x_i$$

Kemudian melakukan uji asumsi menggunakan uji Kolmogorov-smirnov untuk mengetahui apakah kedua sisaan berdistribusi Wrapped Cauchy atau tidak menggunakan *software* didapat hasil *P-value* >α atau 0,763 > 0,05 dan 0,682 > 0,05 yang artinya kedua sisaan berasal dari populasi yang berdistribusi Wrapped Cauchy.

2. Varians Asimptotik dari Parameter Model Hubungan Fungsional Sirkular

   Varians asimptotik dari Parameter Model Hubungan Fungsional Sirkular seperti yang dijelaskan sebelumnya dilakukan menggunakan metode *bootstrap.* Pada langkah awal diperoleh *resampling* sebanyak 116 kali yang diambil secara acak dari 192 data. Pada pasangan data yang terpilih dilakukan kembali estimasi α dan κ yang diberi label $\hat{\alpha}_1$ dan $\hat{\kappa}_1$ yang dihitung sebanyak B kali. Kemudian menghitung varians untuk kedua parameter menggunakan persamaan (8) sebagai berikut:

   Nilai untuk $\bar{\alpha} = 0{,}0810$ dan $\bar{\kappa} = 0{,}8271$

$$var(\hat{\alpha}) = \frac{1}{115}\sum_{j=1}^{116}\left(\hat{\alpha}_j - \bar{\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{1}{115}[(0{,}1327 - 0{,}0810)^2 + \cdots + (0{,}0978 - 0{,}0810)^2] = 0{,}0005$$

$$var(\hat{\kappa}) = \frac{1}{115}\sum_{j=1}^{116}\left(\hat{\alpha}_j - \bar{\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{1}{115}[(0{,}8654 - 0{,}8271)^2 + \cdots + (0{,}8249 - 0{,}8271)^2] = 0{,}0003$$

   Sehingga didapat varians untuk kedua estimasi parameter $\hat{\alpha}$ sebesar 0,0005 dan $\hat{\kappa}$ sebesar 0,0003.

3. Selang Kepercayaan Parameter Model Model Hubungan Fungsional Sirkular

   Nilai dari kedua parameter yang ditaksir dari hasil menaksir varians sebelumnya menggunakan *bootstrap* kemudian diurutkan dari yang terkecil ke yang terbesar. Untuk nilai α yang digunakan sebesar 0,05 atau 5 %. Selang kepercayaan untuk $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\kappa}$ diperoleh menggunakan perhitungan dari *software* Rstudio. Maka selang kepercayaan untuk estimasi paremeter $\hat{\alpha}$ yaitu diantara 0,03947394 sampai dengan 0,13321981 untuk $\hat{\kappa}$ yaitu sebesar 0,7906131 sampai dengan 0,8653901. Nilai dari kedua parameter yang ditaksir dari hasil menaksir varians tersebut terlihat setara dengan selang kepercayaan yang menunjukan bahwa cakupannya sangat baik.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan beberapa hasil penelitian sebagai berikut:

1. Dalam menaksir parameter model hubungan fungsional untuk data sirkular pada arah angin di Kota Bandung dan di Kota Garut dengan metode estimasi kemungkinan maksimum menggunakan algoritma iterasi *re-weighting*, varians asimptotik dan selang kepercayaan menggunakan metode *bootstrap* menghasilkan 2 parameter yaitu $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\kappa}$ dan di aplikasikan kedalam model.
2. Model hubungan fungsional sirkular pada arah angin di Kota Bandung dan di Kota Garut berdistribusi Wrapped Cauchy.

Acknowledge

Terima kasih kepada Allah SWT dengan rasa syukur yang mendalam yang telah memberi kesehatan dan kesempatan karenaNya saya bisa mengerjakan dan menyelesaikan penelitian ini. Terima kasih kepada kedua orang tua saya atas semua kerja kerasnya sampai bisa menyekolahkan saya sampai saat ini. Terimakasih atas segala yang telah diberikan atas segala doa yang dipanjatkan atas dukungan dan juga kasih sayang , semoga kedua orang tua saya bisa bangga atas semua pencapaian ini . Dan terima kasih kepada saudara-saudara keluarga saya yang telah memberikan doa dan dukungan.

Terima kasih kepada dosen dan staf Program Studi Statistika Unisba. Terutama kepada Dr.Suwanda selaku dosen pembimbing saya dan terima kasih kepada Bapak dan Ibu pembahas. Terima kasih kepada seluruh teman-teman statistika unisba 2016 khususnya kelas C yang selalu memberikan do’a, dukungan, kritik, dan sarannya.

Daftar Pustaka

[1] Abuzaid, A. H., El-Laban, W. A., & Hussin, A. G. (2018). Circular Functional Relationship Model with Wrapped Cauchy Errors. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 14, 275-287.

[2] Meteoblue Weather Princeton. (online).https://www.meteoblue.com/en/weather/week/ bandung_indonesia_1650357. (Diakses pada tanggal 12 Agustus 2020)

[3] Walaa Abu Ellaban (2017). Angular Functional Relationship Model with Wrapped Cauchy Errors. Master Thesis, Department of Applied Statistics, Al Azhar University-Gaza, Palestine.

[4] Utama Muhammad Bangkit Riksa, Hajarisman Nusar. (2021). *Metode Pemilihan Variabel pada Model Regresi Poisson Menggunakan Metode Nordberg*. Jurnal Riset Statistika, 1(1), 35-42.

.