

Monitoring Kasus Poisson Multivariat Menggunakan Diagram *D-Exponentially Weighted Moving Average*

Tsania Apriliani Azhahra^{*}, Suliadi

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*tsania.apriliani84@gmail.com, suliadi@gmail.com

Abstract. Multivariate Poisson control chart is a graph that shows a simultaneous observation for data with a Poisson distribution with more than one observation variable. The application of the D-Exponentially Weighted Moving Average (D-EWMA) chart was used on the GaN-epitaxial layer defect data in the LED industry which is divided into three types of defects, that is particles, micropits and microcracks. From this research, it is found that the GaN-epitaxial defect data for the control chart phase I has reached a stable process so control limits are reused for monitoring process on the control chart phase II. The control chart phase II shows if the points between control limits that giving an indication of the controlled process.

Keywords: Control Chart, D-EWMA Chart.

Abstrak. Diagram kendali Poisson multivariat adalah grafik yang menunjukkan suatu pengamatan secara bersamaan untuk data yang berdistribusi Poisson dengan variabel pengamatan lebih dari satu variabel. Penerapan diagram D-Exponentially Weighted Moving Average (D-EWMA) dilakukan pada data kecacatan lapisan GaN-epitaxial dalam industri LED yang dibagi menjadi tiga tipe kecacatan yaitu particles, micropits dan microcracks. Dari penelitian ini diperoleh bahwa data kecacatan GaN-epitaxial untuk diagram kendali fase I telah mencapai proses stabil sehingga batas-batas kendali digunakan kembali untuk proses monitoring pada diagram kendali fase II. Diagram kendali fase II menunjukkan titik-titik berada dalam batas kendali sehingga memberi indikasi proses terkendali.

Kata Kunci: Diagram Kendali, Diagram D-EWMA.

1. Pendahuluan

Kualitas merupakan aspek penting dalam bidang industri. Dalam mencapai kualitas yang diinginkan perusahaan memerlukan sistem untuk mengamati proses produksi sehingga terhindar dari kemungkinan kerugian akibat timbulnya kecacatan pada proses produksi. Metode statistik yang bisa digunakan dalam hal ini yaitu diagram kendali. Diagram kendali adalah grafik yang menggambarkan suatu proses dan dapat memberikan indikasi proses tersebut dalam kendali atau tidak secara statistik.

Akhundjanov dan Pascual (2015) telah melakukan penelitian tentang diagram kendali Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) yang diterapkan dalam statistik D. Statistik D didefinisikan sebagai penjumlahan dari banyaknya ketidaksesuaian dalam karakteristik kualitas setiap pengamatan. Kelebihan untuk penerapan diagram kendali EWMA yaitu dapat mendeteksi pergeseran kecil sehingga lebih sensitif dan memberikan sinyal out of control lebih cepat. Selain itu, Akhundjanov dan Pascual (2015) memodifikasi struktur kovarian dalam

statistik D menjadi lebih umum dimana struktur kovarian setiap pasangan variabel berdistribusi Poisson tidak harus sama.

Penerapan diagram kendali D-EWMA dilakukan pada data kecacatan lapisan *GaN-epitaxial* dalam industri LED (*Light Emitting Diode*) untuk melihat apakah terdapat variabilitas yang tidak biasa, sehingga perusahaan bisa melakukan suatu tindakan sedini mungkin. Berdasarkan latar belakang, tujuan pada penelitian ini:

1. Untuk mengetahui cara menentukan batas kendali diagram kendali D-EWMA
2. Untuk mengetahui hasil penerapan diagram kendali D-EWMA pada data kecacatan lapisan *GaN-epitaxial*.

2. Metodologi

Data yang digunakan untuk metode ini adalah data sekunder yang diperoleh dari jurnal Busaba Laungrungrong berjudul *Multivariate Charts for Multivariate Poisson-Distributed* pada tahun 2010. Data berisi tipe kecacatan dari lapisan *GaN-epitaxial* dalam industri LED (*Light Emitting Diode*) yaitu kecacatan *particles* (X1), *micropits* (X2), dan *microcracks* (X3). Terdapat 2 satuan data yaitu data untuk diagram fase I membentuk diagram D-EWMA dengan data sebanyak 30 pengamatan dan data untuk monitoring 20 pengamatan yang ada (fase II).

Poisson Multivariat

Akhundjanov dan Pascual (2015) menggunakan ide dari Kawamura (1979) untuk menurunkan distribusi Poisson multivariat dalam bentuk penjumlahan p Poisson yang saling bebas. Maka variabel acak X_i sesuai dengan bentuk rumusan model Poisson multivariat dari Kawamura (1979) didefinisikan sebagai jumlah dari baris ke- i . Elemen dari matriks varians-kovarians X :

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i = \sum_{j=1}^p \lambda_{ij}),$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(Y_{ij}, Y_{ji}) = \text{Var}(Y_{ij}) = \lambda_{ij}, i \neq j$$

dimana nilai $\text{var}(Y_{ij})$ untuk distribusi poisson adalah λ_{ij} . Bentuk umum dari matriks varians-kovarians $X=(X_1, X_2, \dots, X_p)^T$, yaitu:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_2 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2p} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \lambda_{p3} & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \quad \dots(2.1)$$

Kawamura (1979) menyatakan sebagai bentuk perbaikan dalam mengestimasi elemen independen (λ_i) pada distribusi Poisson, estimasi untuk λ_i tidak menggunakan varians sampel melainkan rata-rata sampel. Estimasi untuk nilai λ_{ii} dan λ_{ij} adalah sebagai berikut:

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ik}X_{jk} - \frac{(\sum_{k=1}^n X_{ik})(\sum_{k=1}^n X_{jk})}{n}}{n-1}, i \neq j \quad \dots(2.2)$$

$$\hat{\lambda}_{ii} = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ik}}{n} - \sum_{j=1, j \neq i}^p \hat{\lambda}_{ij} \quad \dots(2.3)$$

Diagram Kendali Poisson Multivariat

Diagram kendali adalah salah satu teknik utama yang digunakan dalam pengendalian proses statistik. Diagram kendali adalah teknik yang sangat berguna karena jika terdapat sumber variabilitas yang tidak biasa, rata-rata sampel akan memetakan di luar batas kendali (Montgomery, 2013).

Pada diagram kendali terdapat komponen membangun yaitu batas kendali yang dibagi menjadi garis tengah (*Control Limit*), batas kendali atas (*Upper Control Limit*) dan batas kendali bawah (*Lower Control Limit*). Jika titik-titik yang menunjukkan rata-rata proses pada waktu

tertentu berada diantara garis batas kendali atas dan bawah, maka memberi indikasi suatu keadaan terkendali (*in control*). Sebaliknya, jika titik-titik tersebut keluar dari batas kendali atas maupun bawah, maka memberi indikasi suatu keadaan tidak terkendali (*Out Of Control*). Selain itu, menurut Montgomery (2013), jika 8 titik dalam batas kendali secara runtun berada disisi yang sama dari garis pusat maka menandakan suatu keadaan tidak terkendali.

Diagram kendali Poisson multivariat menjadi salah satu metode pengamatan yang sangat menarik dalam meninjau proses produksi beberapa variabel karakteristik berupa data cacah berkorelasi. Pengamatan lebih dari satu variabel karakteristik diskrit ini terkadang memerlukan pengamatan secara bersamaan sehingga diagram kendali Shewhart, rata-rata, CUSUM, p, np, c dan u tidak cocok untuk data multivariat karena adanya asumsi normalitas (Akhundjanov dan Pascual, 2015).

Diagram D-EWMA

Diagram kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) diterapkan dalam Statistik D untuk proses Poisson multivariat karena diagram EWMA dapat mendeteksi pergeseran rata-rata yang kecil sehingga lebih sensitif dan dapat memberikan sinyal *out of control* lebih cepat dibandingkan diagram tipe Shewhart (Akhundjanov dan Pascual, 2015). Statistik D dinotasikan:

$$D_t = \sum_{i=1}^p x_i \quad ; \quad t = 1, 2, \dots \quad \dots (2.4)$$

Sedangkan statistik D -EWMA didefinisikan sebagai berikut:

$$E_t = \beta D_t + (1 - \beta)E_{t-1} \quad ; \quad E_0 = \mu_D \quad ; \quad t = 1, 2, \dots \quad \dots (2.5)$$

di mana β adalah parameter pembobotan dengan nilai $0 < \beta \leq 1$. Ketika nilai β lebih kecil, diagram EWMA menjadi lebih halus dan sensitif terhadap pergeseran kecil. Sebaliknya jika nilai β lebih besar atau sama dengan 1, diagram EWMA menjadi lebih sensitif terhadap pergeseran yang lebih besar (Akhundjanov dan Pascual, 2015).

Pada batas kendali D -EWMA terdapat dua metode untuk menghitung batas kendalnya. Salah satu metodenya disebut DEWMA1 Batas kontrol DEWMA1 ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_D + K \times \sigma_D \times \sqrt{\frac{\beta}{2 - \beta} [1 - (1 - \beta)^{2t}]} \\ CL &= \mu_D \\ LCL &= \mu_D - K \times \sigma_D \times \sqrt{\frac{\beta}{2 - \beta} [1 - (1 - \beta)^{2t}]} \end{aligned} \quad \dots (2.6)$$

dimana K adalah nilai konstanta positif yang menyatakan lebar dari garis tengah kebatas atas atau batas bawah. Untuk nilai μ_D dan σ_D , Akhundjanov dan Pascual (2015) menyatakan nilai ekspektasi dan varians dari statistik D yang dirumuskan dengan catatan:

$$D = \sum_{i=1}^p X_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p Y_{ij} = \sum_{i=1}^p Y_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p Y_{ij} \quad \dots (2.7)$$

maka:

$$\mu_D = E(D) = \sum_{i=1}^p E(Y_{ii}) + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p E(Y_{ij}) = \sum_{i=1}^p \lambda_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \lambda_{ij} \quad \dots (2.8)$$

$$\sigma^2 = V(D) = \sum_{i=1}^p V(Y_{ii}) + 4 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p V(Y_{ij}) = \sum_{i=1}^p \lambda_{ii} + 4 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \lambda_{ij} \quad \dots (2.9)$$

dengan nilai estimasi $\lambda_{ij} = \hat{\lambda}_{ij}$ seperti pada persamaan (2.7).

Pada penelitian Akhundjanov dan Pascual (2015) batas kendali DEWMA1 dengan

nilai pembobotan β yang kecil mampu mendeteksi berbagai variasi pergeseran. Oleh karena itu dalam artikel ini akan menggunakan nilai β dan K yang sama yaitu $\beta = 0,25$ dengan $K = 2,7077$.

Uji Kesesuaian Distribusi

Uji kesesuaian distribusi (*Goodness of Fit*) digunakan untuk menguji apakah data berasal dari distribusi tertentu. Salah satu metode untuk menguji kesesuaian distribusi adalah uji chi-square. Statistik uji yang digunakan yaitu:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \dots(2.10)$$

dimana O_i adalah frekuensi pengamatan dan E_i adalah frekuensi harapan dengan perhitungan $E_i = np_i$ dan p_i adalah peluang pengamatan setiap variabel.

3. Pembahasan dan Diskusi

Untuk mengetahui apakah data kecacatan lapisan *GaN-epitaxial* masing-masing tipe kecacatan mengikuti distribusi poisson, maka dilakukan uji kesesuaian distribusi dengan menggunakan uji chi-square. Hipotesis untuk pengujian ini adalah sebagai berikut:

H_0 : Data kecacatan lapisan *GaN-epitaxial* mengikuti distribusi Poisson

H_1 : Data kecacatan lapisan *GaN-epitaxial* tidak mengikuti distribusi Poisson

Nilai statistik uji chi-square untuk masing-masing variabel yang diperoleh dengan menggunakan *software minitab* adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Uji Chi-Square

Variabel	Statistik Uji	Nilai Kritis	Kesimpulan
X1	1,4220	$\chi^2_{(0,05;5)} = 11,0705$	H_0 diterima
X2	3,3374	$\chi^2_{(0,05;4)} = 9,4877$	H_0 diterima
X3	5,6169	$\chi^2_{(0,05;3)} = 7,8147$	H_0 diterima

Kriteria uji untuk uji chi-square, tolak H_0 jika nilai $\chi^2 \geq \chi^2_{(\alpha,k-s)}$. Dari tabel diatas semua variabel memiliki nilai $\chi^2 \leq \chi^2_{(\alpha,k-s)}$ maka dapat disimpulkan data kecacatan lapisan *GaN-epitaxial* untuk masing-masing tipe kecacatan mengikuti distribusi poisson.

Matriks Varians-Kovarians X

Elemen dari matriks varians-kovarians X diperoleh dengan menghitung nilai estimasinya yang diperoleh dari persamaan (2.2) dan (2.3). Maka diperoleh nilai estimasi untuk masing-masing λ_{ij} dan λ_{ii} yaitu:

$$\hat{\lambda}_{12} = \frac{329 - \frac{(108 \times 79)}{30}}{29} = 1,5379 \quad \hat{\lambda}_{11} = \frac{108}{30} - (1,5379 + 1,4552) = 0,6069$$

$$\hat{\lambda}_{13} = \frac{341 - \frac{(108 \times 83)}{30}}{29} = 1,4552 \quad \hat{\lambda}_{22} = \frac{79}{30} - (1,5379 + 1,1184) = -0,0230$$

$$\hat{\lambda}_{23} = \frac{251 - \frac{(79 \times 83)}{30}}{29} = 1,1184 \quad \hat{\lambda}_{33} = \frac{83}{30} - (1,4552 + 1,1184) = 0,1931$$

Sehingga diperoleh matriks varians-kovarians $X=(X_1, X_2, X_3)^T$:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3,36 & 1,5379 & 1,4552 \\ 1,5379 & 2,6333 & 1,1184 \\ 1,4552 & 1,1184 & 2,7667 \end{bmatrix}$$

Diagram D-EWMA

Langkah pertama yang dilakukan dengan menentukan nilai awal E_0 yaitu rata-rata statistik D . Statistik D merupakan jumlah kecacatan lapisan *GaN-epitaxial* pada pengamatan ke- i . Rata-rata statistik D dihitung dengan persamaan (2.8) dan simpangan bakunya dengan persamaan (2.9):

$$\begin{aligned}\mu_D &= (\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}) + 2(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{23}) \\ &= (0,6069 - 0,0230 + 0,1931) + 2(1,5379 + 1,4552 + 1,1184) = 9 \\ \sigma_D^2 &= (\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}) + 4(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{23}) \\ &= (0,6069 - 0,0230 + 0,1931) + 4(1,5379 + 1,4552 + 1,1184) = 17,2230 \\ \sigma_D &= \sqrt{17,2230} = 4,1501\end{aligned}$$

Sehingga plot data diperoleh menggunakan persamaan (2.5):

$$\begin{aligned}E_1 &= \beta D_1 + (1 - \beta)E_0 \\ &= (0,25)(10) + (1 - 0,25)(9) = 9,25 \\ E_2 &= \beta D_2 + (1 - \beta)E_1 \\ &= (0,25)(20) + (1 - 0,25)(9,25) = 11,9375 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ E_{30} &= \beta D_{30} + (1 - \beta)E_{29} \\ &= (0,25)(9) + (1 - 0,25)(10,1931) = 9,8949\end{aligned}$$

Setelah menentukan nilai plot kemudian menentukan batas kendali diagram. Perhitungan batas kendali atas, batas kendali bawah dan garis tengah dapat menggunakan persamaan (2.6) sehingga diperoleh:

$$CL = \mu_D = 9$$

untuk $t = 1$

$$UCL = 9 + 2,7077 \times 4,1501 \times \sqrt{\frac{0,25}{2 - 0,25} [1 - (1 - 0,25)^{2(1)}]} = 11,8093$$

$$LCL = 9 - 2,7077 \times 4,1501 \times \sqrt{\frac{0,25}{2 - 0,25} [1 - (1 - 0,25)^{2(1)}]} = 6,1907$$

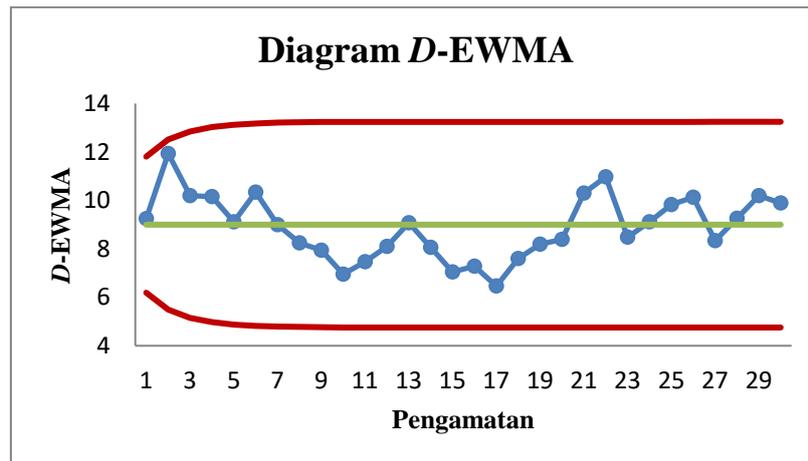
·
·
·

untuk $t = 30$

$$UCL = 9 + 2,7077 \times 4,1501 \times \sqrt{\frac{0,25}{2 - 0,25} [1 - (1 - 0,25)^{2(30)}]} = 13,2472$$

$$LCL = 9 - 2,7077 \times 4,1501 \times \sqrt{\frac{0,25}{2 - 0,25} [1 - (1 - 0,25)^{2(30)}]} = 4,7528$$

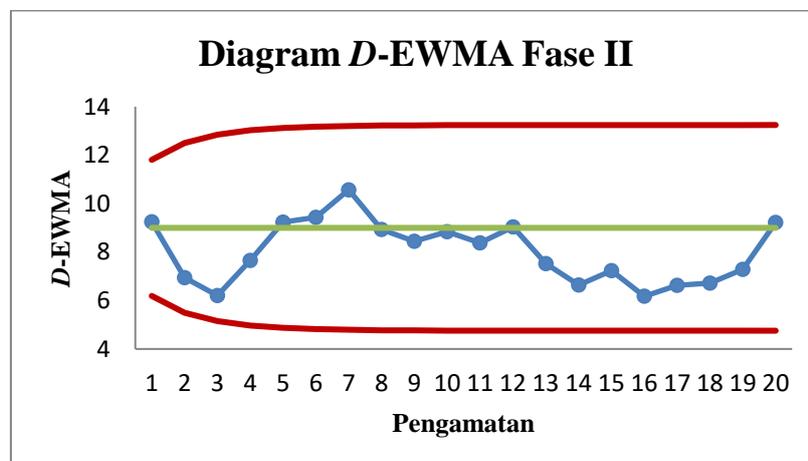
Setelah mendapat nilai E_t , garis tengah, batas atas dan batas bawah maka diagram D -EWMA dapat disusun. Diagram D -EWMA dengan nilai pembobot $\beta = 0,25$ dan $K = 2,7077$ untuk data kecacatan lapisan *GaN-epitaxial* dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Kendali Data Kecacatan Lapisan *GaN-epitaxial*

Hasil dari diagram *D-EWMA* untuk fase I dengan 30 pengamatan menghasilkan keadaan *in control* karena semua titik berada dalam batas kendali sehingga secara statistik proses tersebut terkendali. Oleh karena diagram kendali sudah pada fase I dimana secara statistik proses stabil sudah tercapai maka batas-batas pada diagram kendali ini bisa digunakan untuk membuat diagram kendali pada proses monitoring (fase II).

Untuk proses monitoring atau diagram kendali fase II menggunakan batas-batas kendali proses stabil yang diperoleh pada fase I. Oleh karena itu untuk mengamati 20 nilai pengamatan selanjutnya digunakan nilai rata-rata dan varians pada fase I. Maka dengan batas-batas kendali pada fase I diperoleh diagram kendali *D-EWMA* fase II sebagai berikut.



Gambar 2. Diagram Kendali Data Kecacatan Lapisan *GaN-epitaxial* (Fase II)

Hasil dari diagram *D-EWMA* dengan 20 pengamatan yang ada menghasilkan keadaan *in control* karena semua titik berada dalam batas kendali sehingga secara statistik proses tersebut terkendali.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas cara menentukan batas kendali untuk diagram kendali Poisson multivariat yaitu diagram *D-EWMA* dengan menetapkan nilai β dan K . Pada artikel ini penulis menggunakan nilai β dan K yang digunakan Akhnundjanov dan Pascual (2015) yaitu sebesar $\beta = 0,25$ dan $K = 2,7077$ kemudian nilai batas-batas kendali diperoleh dengan menggunakan rumus:

$$UCL = \mu_D + K \times \sigma_D \times \sqrt{\frac{\beta}{2 - \beta} [1 - (1 - \beta)^{2t}]}$$

$$CL = \mu_D$$

$$LCL = \mu_D - K \times \sigma_D \times \sqrt{\frac{\beta}{2 - \beta} [1 - (1 - \beta)^{2t}]}$$

Penerapan diagram D -EWMA untuk fase I pada industri LED mencapai proses stabil sehingga nilai batas-batas kendali dapat digunakan untuk monitoring proses selanjutnya pada diagram kendali fase II. Pada diagram D -EWMA fase II mengidentifikasi bahwa data kecacatan *GaN-epitaxial* secara statistik dalam keadaan proses terkendali karena tidak terdapat titik yang berada diluar batas kendali.

Acknowledge

Peneliti mengucapkan terimakasih kepada Tuhan Yang Maha Esa, orang tua, Bapak Suliadi selaku dosen pembimbing serta seluruh dosen Prodi Statistika dan teman-teman peneliti, karena atas segala bantuan semuanya sehingga penelitian ini terselesaikan dengan lancar.

Daftar Pustaka

- [1] Akhundjanov, S. B., & Pascual, F. G. (2015). Exponentially Weighted Moving Average Charts For Multivariate Poisson Processes. *Journal of Communications in Statistics*, 46(10): 4977-5000.
- [2] Kawamura, K. (1979). The Structure of Multivariate Poisson Distribution. *Journal of Kodai Mathematical*, 2(3): 337-345.
- [3] Montgomery, D. C. (2013). *Introduction to Statistical Quality Control* (7th edition). USA: John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Utama Muhammad Bangkit Riksa, Hajarisman Nusar. (2021). *Metode Pemilihan Variabel pada Model Regresi Poisson Menggunakan Metode Nordberg*. *Jurnal Riset Statistika*, 1(1), 35-42.