

Penaksiran Fungsi Karakteristik Empirik untuk Data Kerugian Agregat Asuransi Kendaraan Bermotor

Khalimatus Sa'diah^{*}, Aceng Komarudin Mutaqin

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*sadiahkhalimatus4@gmail.com, aceng.k.mutaqin@gmail.com

Abstract. Aggregate loss is the total loss incurred by an insured in a certain period of time. The aggregate loss depends on the frequency of claims and the size of claims each time the insured submits a claim. The distribution of aggregate losses is one thing that must be known to calculate motor vehicle insurance premiums. The empirical characteristic function of the aggregate loss is a matter that must be determined to then estimate the density function and the cumulative distribution function of the aggregate loss. The estimation of the empirical characteristic function for the aggregate loss is in the form of a complex number (containing the real part and the imaginary part). The real part is in the interval 0.8 to 1. The imaginary part is in the interval -0.05 to 0.05. In the real part and the imaginary part, it can be seen that the estimation of the empirical characteristic function for the claimed frequency has a different pattern.

Keywords: Aggregate Loss, Characteristic function, Frequency of claims, Motor insurance.

Abstrak. Kerugian agregat adalah total kerugian yang dialami oleh seorang tertanggung dalam satu periode waktu tertentu. Kerugian agregat bergantung pada frekuensi klaim dan besar klaim setiap kali tertanggung mengajukan klaim. Distribusi dari kerugian agregat merupakan salah satu yang harus diketahui untuk menghitung premi asuransi kendaraan bermotor. Fungsi karakteristik empirik dari kerugian agregat merupakan hal yang harus ditentukan untuk kemudian menaksir fungsi densitas dan fungsi distribusi kumulatif dari kerugian agregat. Taksiran fungsi karakteristik empirik untuk kerugian agregat nilainya berbentuk bilangan kompleks (memuat bagian riil dan bagian imajiner). Bagian riil berada pada interval 0,8 hingga 1. Sedangkan bagian imajiner berada pada interval -0,05 hingga 0,05. Pada bagian riil dan bagian imajiner terlihat bahwa taksiran dari fungsi karakteristik empirik untuk frekuensi klaim memiliki pola yang berbeda.

Kata Kunci: Kerugian agregat, Fungsi karakteristik, Frekuensi klaim, Asuransi kendaraan bermotor.

1. Pendahuluan

Sebagian besar penduduk Indonesia menggunakan kendaraan umum atau kendaraan pribadi untuk berpergian. Kendaraan pribadi kadang memiliki risiko kehilangan, kerusakan, atau hal lain yang menyebabkan kerugian bagi pemiliknya. Risiko merupakan kemungkinan terjadinya peristiwa yang dapat merugikan. Suatu ikhtiar dalam upaya menghindari risiko yang mungkin terjadi disebut asuransi.

Secara umum asuransi dibagi menjadi 3 kategori: (a) Asuransi jiwa; (b) Asuransi sosial; (c) Asuransi Kerugian. Asuransi kerugian merupakan pengalihan risiko atas kerugian, kehilangan manfaat dan tanggungjawab hukum kepada pihak ketiga yang timbul dari peristiwa yang tidak pasti. Jenis asuransi kerugian di Indonesia yang banyak diminati salah satunya adalah asuransi kendaraan bermotor, karena memberikan pertanggungan atas kehilangan, kerusakan, atau kerugian yang mengurangi nilai atas obyek kendaraan bermotor.

Membeli produk asuransi merupakan salah satu pengelolaan risiko dengan cara mengalihkan atau melimpahkan tanggung jawab finansial kepada pihak perusahaan asuransi. Dengan begitu, tentu akan ada biaya untuk mengelola pengalihan risiko tersebut. Sejumlah uang/biaya untuk mengelola pengalihan risiko yang dibayarkan kepada perusahaan asuransi disebut premi.

Dalam menghitung premi asuransi kendaraan bermotor salah satu yang harus diketahui yaitu distribusi dari kerugian agregat. Kerugian agregat adalah total kerugian yang dialami oleh seorang tertanggung dalam satu periode waktu tertentu. Kerugian agregat bergantung pada frekuensi klaim dan besar klaim setiap kali tertanggung mengajukan klaim.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka tujuan dari penelitian ini yaitu untuk menentukan taksiran fungsi karakteristik empiric untuk data kerugian agregat asuransi kendaraan bermotor.

2. Landasan Teori

Asuransi Kendaraan Bermotor

Asuransi kendaraan bermotor merupakan salah satu produk asuransi kerugian yang akan melindungi tertanggung dari risiko kerugian yang mungkin timbul sehubungan dengan kepemilikan dan pemakaian kendaraan bermotor. Ada dua jenis perlindungan untuk asuransi kendaraan bermotor, yaitu Total Loss Only (TLO) dan Comprehensive (komprehensif).

Peraturan Ketua Otoritas Jasa Keuangan (OJK) pada tahun 2017 membagi kendaraan bermotor menjadi delapan kategori jenis kendaraan seperti tersedia dalam Tabel 2.1.

Tabel 1. Kategori Kendaraan Bermotor

Kategori	Harga Pertanggungan
(1)	(2)
Jenis Kendaraan Non Bus dan Non Truk	
Kategori 1	0 s.d Rp. 150.000.000
Kategori 2	Rp. 150.000.001,00 s.d Rp. 300.000.000
Kategori 3	Rp. 300.000.001,00 s.d Rp. 500.000.000
Kategori 4	Rp. 500.000.001,00 s.d Rp. 800.000.000
Kategori 5	Lebih dari Rp. 800.000.000
Jenis Kendaraan Bus dan Truk	
Kategori 6	Truk, untuk semua uang pertanggungan
Kategori 7	Bus, untuk semua pertanggungan
Jenis Kendaraan Roda 2 (dua)	
Kategori 8	Semua uang pertanggungan

Sumber: Peraturan OJK 2017

Model Kerugian Agregat

Kerugian agregat dalam model risiko kolektif, yaitu:

$$S = \sum_{j=1}^N X_j, \quad (2.1)$$

Model tersebut merupakan jumlah stokastik N dari peubah acak yang bersifat saling bebas yaitu X_1, X_2, \dots, X_N yang mewakili besar klaim lebih lanjut dimodelkan oleh $X_j \sim F_X$.

F_X menyatakan distribusi peluang, khususnya fungsi distribusi kumulatif dari distribusi besar klaim yang tidak tergantung pada $N \sim F_N$, jumlah acak klaim asuransi yang dihasilkan dalam periode waktu tertentu, dan F_N menunjukkan distribusi peluang dari distribusi frekuensi klaim. Tentu, kerugian agregat $S = 0$ jika $N = 0$.

Distribusi peluang kerugian agregat (2.1) menjadi distribusi campuran,

$$F_S = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N = n) F_X^n, \quad (2.2)$$

dimana $\Pr(N = n)$ menunjukkan peluang dari kejadian acak bahwa $N = n$, dan F_X^n menyatakan konvolusi n-kali dari fungsi distribusi, F_X .

Fungsi Karakteristik Kerugian Agregat

Fungsi Karakteristik Parametrik

Untuk peubah acak X , fungsi karakteristik didefinisikan sebagai nilai ekspektasi dari peubah acak e^{itX} , yaitu

$$cf_X(t) = E(e^{itX}) \quad (2.4)$$

dimana i menunjukkan unit imajiner yang didefinisikan $i = \sqrt{-1}$, dan t elemen bilangan real.

Fungsi karakteristik dari peubah acak kontinu X , $cf_X(t)$, dengan distribusi peluangnya F_X (misalkan $X \sim F_X$) dan fungsi densitas peluang $pdf_X(x)$, diberikan sebagai (invers) Fourier transform dari fungsi densitas peluangnya, yaitu

$$cf_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} pdf_X(x) dx; t \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Solusi analitik dari fungsi karakteristik diketahui untuk beberapa distribusi peluang standar, atau dapat diturunkan dengan menggunakan sistem aljabar komputer yang sesuai, misalnya MATHEMATICA. Di sisi lain, jika solusi analitik dari fungsi karakteristik tidak diketahui atau terlalu rumit, maka fungsi karakteristik tersebut masih dapat dievaluasi secara numerik, bisa secara langsung dari definisi pada Persamaan (2.4) atau (2.5), atau melalui penyajian alternatif lainnya. Sebagai contoh, dengan menggunakan transformasi integral Fourier setengah ruang untuk peubah acak kontinu positif X (yaitu dengan $X \geq 0$) dengan fungsi densitas peluangnya diberikan oleh suatu fungsi analitik $pdf_X(z)$, yang terdefinisi untuk bilangan kompleks, $z \in \mathbb{C}$, didapatkan

$$cf_X(t) = \int_0^{\infty} \frac{i}{t} pdf_X\left(\frac{ix}{t}\right) e^{-x} dx; t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

Selain itu, dengan menggunakan transformasi stabilisasi yang cocok dari $(0, \infty)$ ke $(0, 1)$, fungsi karakteristik dapat dievaluasi secara numerik pada $t \in \mathbb{R}$ dengan menggunakan aturan (Gaussian) *quadrature* sederhana dari integral,

$$cf_X(t) = \int_0^1 \frac{i}{t} pdf_X\left(\frac{i}{t} \left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right) \frac{2xe^{-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2}}{(1-x)^3} dx. \quad (2.7)$$

Metode ini dapat digunakan untuk mengevaluasi fungsi karakteristik dari beberapa distribusi standar.

Fungsi karakteristik dari konvolusi stokastik $Y = X_1 + \dots + X_N$, di mana X_j adalah peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik dengan fungsi karakteristik umumnya $cf_X(t)$ dan N adalah peubah acak diskrit saling bebas dengan fungsi karakteristik $cf_N(t)$, diberikan oleh

$$cf_Y(t) = cf_N(-i \log(cf_X(t))). \quad (2.8)$$

Oleh karena itu, fungsi karakteristik dari distribusi kerugian agregat yang didefinisikan dalam Persamaan (2.1) dan (2.2), katakanlah $cf_S(t)$ atau $cf_{F_S}(t)$, diberikan oleh

$$cf_S(t) = cf_N(-i \log(cf_X(t))). \quad (2.9)$$

dimana $cf_N(t)$ dan $cf_X(t)$ menyatakan fungsi karakteristik dari distribusi frekuensi klaim dan besar klaim.

Fungsi Karakteristik Non-Parametrik

Misalkan X_1, \dots, X_n merupakan peubah acak dengan fungsi distribusi umumnya adalah F_X .

Distribusi empirik berdasarkan sampel acak X_1, \dots, X_n adalah suatu distribusi campuran dari distribusi degenerate Dirac dengan bobot yang sama terkonsentrasi pada X_1, \dots, X_n .

Oleh karena itu, fungsi karakteristik empirik adalah campuran dengan bobot yang sama dari fungsi karakteristik peubah acak Dirac yang terkonsentrasi pada nilai-nilai yang diamati x_j pada X_j , yaitu campuran dari fungsi karakteristik yang diberikan oleh $cf_{x_j}(t) = e^{itx_j}$,

$$cf_{\hat{F}_X}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itx_j}. \tag{2.10}$$

\hat{F}_N menyatakan fungsi distribusi kumulatif empirik dari frekuensi klaim n_1, \dots, n_j , di setiap J tahun historis, dengan fungsi karakteristik empiriknya diberikan oleh

$$cf_{\hat{F}_N}(t) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J e^{itn_j}. \tag{2.11}$$

Selanjutnya, misalkan \hat{F}_X menyatakan fungsi distribusi kumulatif empirik berdasarkan K nilai pengamatan dari klaim x_1, \dots, x_K , dengan fungsi karakteristik empiriknya adalah

$$cf_{\hat{F}_X}(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{itx_k}. \tag{2.12}$$

Kemudian, analogi dengan Persamaan (2.9), fungsi karakteristik empirik, katakan $cf_{\hat{F}_S}(t)$, dari distribusi risiko kolektif S adalah

$$cf_{\hat{F}_S}(t) = cf_{\hat{F}_N}(-i \log(cf_{\hat{F}_X}(t))) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left(\frac{1}{K} e^{itx_k} \right)^{n_j}. \tag{2.13}$$

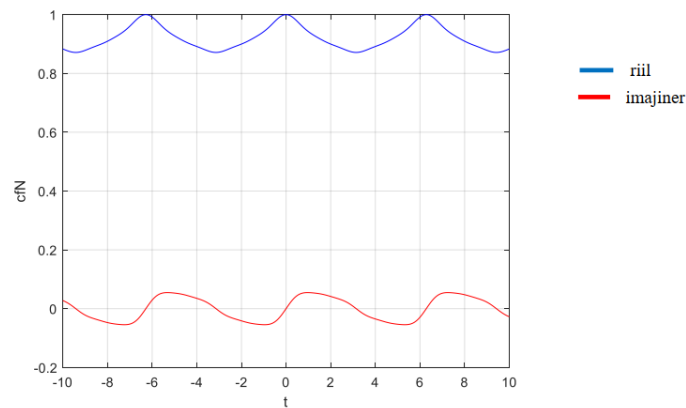
Implementasi Software

Witkovsky dkk. (2017) telah menerapkan metode dan algoritma yang dibahas diatas ke dalam software MATLAB melalui *Characteristic Function Toolbox* (CF Toolbox). Toolbox tersebut tersedia di <https://goo.gl/gBfdwY>.

3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

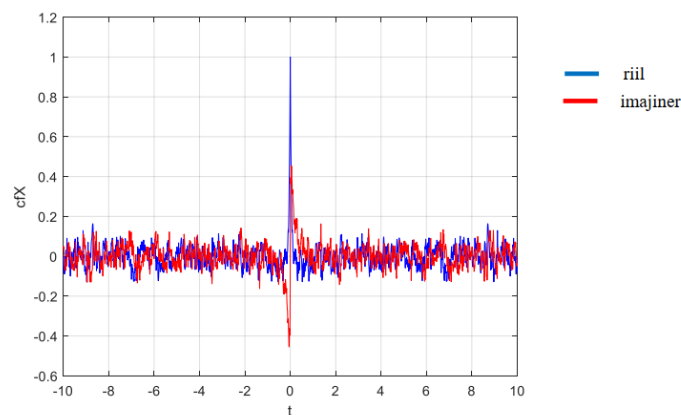
Taksiran fungsi karakteristik empirik dari kerugian agregat asuransi kendaraan bermotor kategori 7 tergantung pada taksiran fungsi karakteristik empirik untuk data frekuensi klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7 dan taksiran fungsi karakteristik empirik untuk kerugian agregat asuransi kendaraan bermotor kategori 7. Taksiran fungsi karakteristik empirik untuk data frekuensi klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7 dapat dihitung menggunakan Persamaan (2.11) berdasarkan data data frekuensi klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7. Dengan bantuan perangkat lunak Matlab, diperoleh taksiran fungsi karakteristik empirik untuk data frekuensi klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7. Hasilnya disajikan dalam Gambar 1.

Taksiran fungsi karakteristik empirik untuk data besar klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7 dapat dihitung menggunakan Persamaan (2.12) berdasarkan data data besar klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7. Dengan bantuan perangkat lunak Matlab, diperoleh taksiran fungsi karakteristik empirik untuk data besar klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7. Hasilnya disajikan dalam Gambar 2.



Gambar 1. Taksiran fungsi karakteristik empirik untuk frekuensi klaim

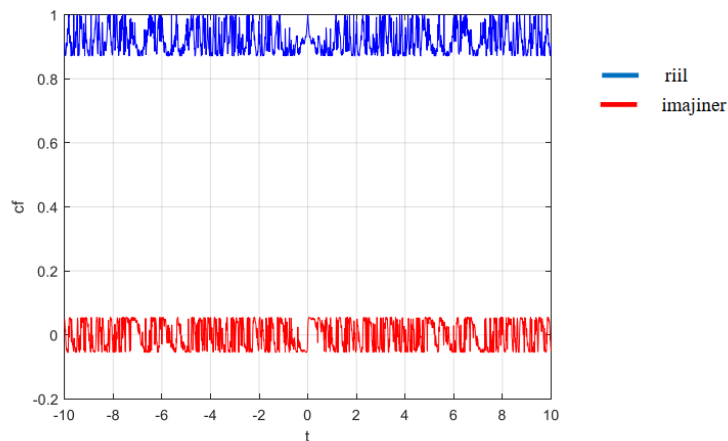
Berdasarkan Gambar 1, taksiran fungsi karakteristik empirik untuk frekuensi klaim nilainya berbentuk bilangan kompleks (memuat bagian riil dan bagian imajiner). Bagian riil dan bagian imajinernya terpisah. Bagian riil berada pada interval 0,8 hingga 1. Sedangkan bagian imajiner berada pada interval -0,2 hingga 0,2. Pada bagian riil dan bagian imajiner terlihat bahwa taksiran dari fungsi karakteristik empirik untuk frekuensi klaim memiliki pola yang berbeda.



Gambar 2. Taksiran fungsi karakteristik empirik untuk besar klaim

Berdasarkan Gambar 2, taksiran fungsi karakteristik empirik untuk besar klaim nilainya berbentuk bilangan kompleks (memuat bagian riil dan bagian imajiner). Bagian riil dan bagian imajiner dari nilai taksiran fungsi karakteristik empirik untuk besar klaim hampir memiliki pola yang hampir sama, kecuali pada $t = 0$.

Taksiran fungsi karakteristik empirik untuk kerugian agregat asuransi kendaraan bermotor kategori 7 dapat dihitung menggunakan Persamaan (2.13) berdasarkan data data frekuensi klaim dan data besar klaim asuransi kendaraan bermotor kategori 7. Dengan bantuan perangkat lunak Matlab, diperoleh taksiran fungsi karakteristik empirik untuk kerugian agregat asuransi kendaraan bermotor kategori 7. Hasilnya disajikan dalam Gambar 3.



Gambar 3. Taksiran fungsi karakteristik empirik untuk kerugian agregat

Berdasarkan Gambar 3, taksiran fungsi karakteristik empirik untuk kerugian agregat nilainya berbentuk bilangan kompleks (memuat bagian riil dan bagian imajiner). Bagian riil dan bagian imajinernya terpisah. Bagian riil berada pada interval 0,8 hingga 1. Sedangkan bagian imajiner berada pada interval -0,05 hingga 0,05. Pada bagian riil dan bagian imajiner terlihat bahwa taksiran dari fungsi karakteristik empirik untuk frekuensi klaim memiliki pola yang berbeda.

4. Kesimpulan

Taksiran fungsi karakteristik empirik untuk kerugian agregat nilainya berbentuk bilangan kompleks (memuat bagian riil dan bagian imajiner). Bagian riil berada pada interval 0,8 hingga 1. Sedangkan bagian imajiner berada pada interval -0,05 hingga 0,05. Pada bagian riil dan bagian imajiner terlihat bahwa taksiran dari fungsi karakteristik empirik untuk frekuensi klaim memiliki pola yang berbeda.

5. Saran

Hendaknya untuk penelitian selanjutnya dapat melanjutkan penelitian ini dengan membahas mengenai penaksiran fungsi karakteristik empirik dari data kerugian agregat asuransi kendaraan bermotor untuk kategori lain atau untuk produk asuransi kerugian lainnya.

Daftar Pustaka

- [1] Feng, L., Lin, X. (2013). Inverting Analytic Characteristic Function and Financial Application. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 4(1), 372-98.
- [2] Kementrian Keuangan Republik Indonesia Badan Pengawasan Pasar Modal Dan Lembaga Keuangan. (2011). Peraturan Ketua Badan Pengawasan Pasar Modal Dan Lembaga Keuangan Nomor: PER-04/BL/2011.
- [3] Lukacs, E. (1970). *Characteristics function*. London, Griffin.
- [4] Witkovsky, V., Wimmer, G., Duby, T. (2017). Computing The Aggregate Loss Distribution Based On Numerical Inversion of The Compound Empirical Characteristic Function of Frequency and Severity. <https://arxiv.org/pdf/1701.08299.pdf> diunduh pada tanggal 15 Maret 2020.