

Diagram Kontrol Sintetik Berdasarkan Dua Varian Sampel untuk Memantau Matriks Kovarian

Nur'aida Mustika*, Suwanda

Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Islam Bandung.

*nuraidamustika@gmail.com, suwanda@unisba.ac.id

Abstract. In statistics, how to control quality can be done using control charts. A control chart is a graph that provides an overview to determine whether a process is in a controlled state or not. In addition to monitoring the process with an average vector, a process is also needed to control the possible shifts in the covariance matrix for two qualities with characteristics simultaneously. In its application, the variability of the service process shows that the condition is in control but after the covariance matrix is shifted the service process on the contrary shows the condition that is out of control. So, this thesis will discuss new theories or statistics to monitor covariance matrices regarding control charts, namely synthetic control charts which are a combination of Shewhart control charts and Conforming Run Length (CRL) control charts. In other words, a synthetic control chart based on two sample variants will be applied to control the service process with variable service speed and material mastery of the officers. This synthetic control chart is used because in detecting process changes it is faster and more sensitive than the general variant control chart which is the proposed control chart for the two-variable case. The data used is secondary data, namely the results of a survey on the quality of library services at BPS DKI JAKARTA. The results of monitoring the service process are out of control.

Keywords: Control Chart, Covariance Matrix, Synthetic, Bivariate Process

Abstrak. Dalam statistik, cara mengontrol kualitas dapat dilakukan dengan menggunakan diagram kendali. Diagram kendali adalah grafik yang memberikan gambaran umum untuk menentukan apakah suatu proses berada dalam keadaan terkontrol atau tidak. Selain memantau proses dengan vektor rata-rata, diperlukan juga proses untuk mengontrol kemungkinan pergeseran matriks kovarian untuk dua kualitas dengan karakteristik secara bersamaan. Dalam penerapannya, variabilitas proses pelayanan menunjukkan bahwa kondisi terkontrol tetapi setelah matriks kovarians digeser proses pelayanan sebaliknya menunjukkan kondisi yang tidak terkontrol. Maka, tesis ini akan membahas teori atau statistik baru untuk memantau matriks kovariansi mengenai diagram kendali yaitu diagram kendali sintetik yang merupakan gabungan dari diagram kendali *Shewhart* dan diagram kendali *Conforming Run Length* (CRL). Dengan kata lain, peta kendali sintetik berdasarkan dua varian sampel akan

diterapkan untuk mengontrol proses pelayanan dengan variabel kecepatan pelayanan dan penguasaan material petugas. Diagram kontrol sintetik ini digunakan karena dalam mendeteksi perubahan proses lebih cepat dan lebih sensitif daripada diagram kontrol varian umum yang merupakan diagram kontrol yang diusulkan untuk kasus dua variabel. Data yang digunakan adalah data sekunder yaitu hasil survei kualitas pelayanan perpustakaan di BPS DKI JAKARTA. Hasil pemantauan proses layanan di luar kendali.

Kata Kunci: Diagram Kontrol, Matriks Kovarian, Sintetis, Proses Bivariat

1. Pendahuluan

Pengendalian kualitas merupakan proses yang digunakan untuk menjamin tingkat kualitas dalam produk atau jasa. Tujuan dari pengendalian kualitas statistik adalah melihat pergeseran pada proses dan membuang keragaman agar memperoleh kualitas yang baik. *Statistical process control* atau yang disingkat SPC ini adalah bagan visual untuk memberi gambaran proses yang sedang berjalan untuk mengetahui apakah proses berada dalam batas-batas yang telah ditetapkan sebelumnya atau tidak. Salah satu alat utamanya yaitu diagram kontrol.

Diagram kontrol adalah tampilan grafis dari karakteristik kualitas yang telah diukur atau dihitung dari sampel dengan jumlah sampel atau waktu. Terdapat dua macam diagram kontrol berdasarkan jenis karakteristik kualitasnya yaitu diagram kontrol variabel dan diagram kontrol atribut. Diagram kontrol variabel digunakan apabila karakteristik kualitas yang diamati dapat diukur salah satu contohnya diagram kontrol Shewhart. Sedangkan diagram kontrol atribut digunakan apabila karakteristik kualitas yang diamati hanya dinyatakan dalam kategori atau bersifat kualitatif.

Ada situasi dimana perlu mengontrol dua kasus kualitas terkait karakteristik secara bersamaan berdasarkan asumsi bahwa karakteristik ini terdistribusi secara normal bivariat. Sama seperti apa yang terjadi pada vektor rata-rata, juga diperlukan untuk mengontrol kemungkinan pergeseran dalam matriks kovarian (Alt FB, 1985). Dalam prakteknya, saat ada atau tidaknya diberi pergeseran variabilitas proses dikatakan baik jika seharusnya dalam keadaan *in control*. Sebaliknya jika terjadi pergeseran dalam variabilitas proses menghasilkan keadaan yang *out of control* artinya perlu ada perbaikan proses yang harus dilakukan.

Dalam makalah ini akan dikaji pengembangan diagram kontrol dengan kata lain diagram kontrol sintetik yang merupakan teknik kontrol proses statistik menggabungkan dari diagram kontrol Shewhart dan diagram kontrol *Conforming run length (CRL)* menurut (Wu dan Spedding, 2002). Pengembangan baru diagram kontrol sintetik ini disebut dengan diagram kontrol sintetik *VMAX* yaitu berdasarkan nilai terbesar dari dua varian sampel untuk memantau matriks kovarian yang mendeteksi perubahan proses lebih cepat daripada diagram kontrol berdasarkan varians umum.

Berdasarkan penjelasan diatas, diagram kontrol sintetik ini akan diaplikasikan pada data hasil survei kualitas pelayanan perpustakaan di BPS DKI JAKARTA. Selanjutnya, perumusan masalahnya adalah bagaimana penerapan diagram kontrol sintetik berdasarkan dua varian sampel untuk memantau matriks kovarian. Maka tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan makalah ini adalah untuk mengetahui bagaimana penerapan diagram kontrol sintetik berdasarkan dua varian sampel untuk memantau matriks kovarian.

2. Landasan Teori

Distribusi Normal Bivariat

Distribusi bivariat normal merupakan suatu distribusi yang diperoleh dari perluasan distribusi normal univariat, dimana perbedaannya dilihat dari dimensinya. Pada univariat dimensi yang digunakan adalah 1 ($p = 1$) sedangkan untuk bivariat dimensi yang digunakan adalah 2 ($p = 2$). Dalam pengendalian kualitas statistik bivariat, umumnya menggunakan distribusi normal untuk menggambarkan perilaku karakteristik kualitas. Berikut fungsi kepadatan peluangnya adalah:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x^2\sigma_y^2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\} \quad \dots(2.1)$$

Matriks Kovarian untuk Proses Bivariat

Dalam memantau matriks kovarian untuk proses bivariat akan menggunakan statistik baru yaitu dengan nilai maksimum dari varian sampel standar $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$ dan $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n}$, dimana $x_i = \frac{(X_i - \mu_x)}{\sigma_x}$ dan $y_i = \frac{(Y_i - \mu_y)}{\sigma_y}$ dengan X dan Y menjadi dua karakteristik kualitas yang mengikuti distribusi normal bivariat singkatnya $VMAX = \max\{S_x^2, S_y^2\}$. Matriks kovarian dalam keadaan terkontrol yaitu:

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \quad \dots(2.2)$$

Dengan mengasumsikan bahwa vektor rata-rata tidak berubah $\mu = (\mu_x, \mu_y)$. Menurut (Surtihadi, 2004) mempertimbangkan dua jenis penyebab yang dapat dialihkan mengubah matriks kovarian awal dengan:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} a. a. \sigma_x^2 & a. b. \sigma_{yx} \\ a. b. \sigma_{xy} & b. b. \sigma_y^2 \end{pmatrix} \quad \dots(2.3)$$

Diagram Kontrol Shewhart

Menurut (Wheeler, 2000) diagram kontrol adalah sebuah grafik yang memberi gambaran secara visual tentang perilaku sebuah proses. Diagram kontrol pertama kali diperkenalkan oleh Walter A. Shewhart pada 1920 saat bekerja di Bell Labs. Diagram kontrol yang digunakan Walter A. Shewhart untuk memberikan petunjuk-petunjuk dasar dalam mengambil tindakan yang diperlukan agar proses atau aktivitas berada dalam keadaan yang diinginkan. Bentuk dari diagram ini dihasilkan pada sistem kartesius dengan sumbu datar menyatakan periode dan sumbu tegak menyatakan karakteristik mutu. Garis Pusat (*GP*) digambarkan sejajar dengan sumbu datar beserta sepasang batas kontrol. Batas kontrol yang berada di atas garis pusat disebut Batas Kontrol Atas (*BKA*) dan batas yang berada di bawah garis pusat disebut Batas Kontrol Bawah (*BKB*).

Menurut (Muchlis, 2010) beberapa keuntungan penggunaan diagram kontrol Shewhart yaitu ukuran sampel yang diambil dalam setiap penelitian tidak terlalu banyak, dapat mengetahui variasi yang bersifat acak dan dapat menunjukkan variasi yang disebabkan kerusakan alat-alat yang menyebabkan adanya pengaruh kondisi yang lebih buruk. Dilihat dari karakteristik kualitas yang diteliti diagram kontrol Shewhart terbagi menjadi dua bagian pertama diagram kontrol untuk data variabel dimana pengendalian kualitas ini didapat apabila karakteristik kualitas dari hasil pengukuran dan kedua diagram kontrol untuk data atribut yang umumnya diukur dengan cara dihitung menggunakan daftar pencacahan.

Diagram Kontrol *Conforming Run Length (CRL)*

Diagram kontrol CRL dibuat untuk pengendalian kualitas data atribut untuk unit individu. Tujuan diagram ini mendeteksi pergeseran proporsi dari kerusakan pada saat pemeriksaan 100% dilakukan. CRL didefinisikan sebagai banyaknya unit yang baik diantara unit yang rusak berturut-turut termasuk unit terakhir yang cacat. Proses dikatakan diluar kontrol jika nilai CRL cukup kecil atau CRL lebih kecil dari batas kontrol bawah. Penentuan BKB didasarkan pada

distribusi CRL sebagai berikut:

$$F_{\theta}(CRL = L) = 1 - (1 - \theta)^L, L = 1, 2, \dots \quad \dots(2.4)$$

Untuk mendeteksi peningkatan θ , BKB_{CRL} ditentukan sehingga:

$$F_{\theta}(BKB) = 1 - (1 - \theta_0)^{BKB} = \alpha_{CRL} \quad \dots(2.5)$$

Jika diselesaikan maka akan diperoleh:

$$BKB = BKB_{CRL} = \frac{\ln(1 - \alpha_{CRL})}{\ln(1 - \theta_0)} = L \quad \dots(2.6)$$

Dengan α_{CRL} merupakan kekeliruan type I dari diagram CRL dan θ_0 merupakan proporsi kerusakan dalam kontrol. L harus bilangan bulat. Jika CRL sampel lebih kecil dari atau sama dengan L dapat disimpulkan bahwa proporsi kerusakan meningkat dan sinyal diluar kontrol dapat diberikan. ARL dari diagram kontrol CRL adalah:

$$ARL_{CRL} = \frac{1}{F_{\theta}(L)} = \frac{1}{1 - (1 - \theta)^L} \quad \dots(2.7)$$

Diagram Kontrol Sintetik VMAX

Diagram kontrol sintetik merupakan gabungan dari diagram kontrol *Conforming Run Length (CRL)* dan diagram kontrol VMAX. Andaikan sampel berukuran n diambil dari proses pada interval waktu regular. Dua karakteristik kualitas berkorelasi X dan Y diukur dan VMAX statistik dihitung.

Batas-batas diagram kontrol VMAX adalah:

$$\begin{aligned} BKA &= k \\ BKB &= 0 \end{aligned} \quad \dots(2.8)$$

Nilai k dapat ditentukan sebagai berikut:

Kekeliruan tipe II (β) adalah probabilitas $VMAX < k$, padahal proses *out of control*. Dinyatakan secara matematika sebagai berikut:

$$\beta = P(VMAX < k) = P(S_x^2 < k \cap S_y^2 < k) \quad \dots(2.9)$$

Sehingga *power* dari diagram kontrol VMAX diberikan oleh:

$$p = 1 - \beta \quad \dots(2.10)$$

atau

$$p = 1 - \Pr[(S_x^2 < k) \cap (S_y^2 < k)] \quad \dots(2.11)$$

ARL diberikan oleh:

$$ARL = \frac{1}{1 - \Pr[(S_x^2 < k) \cap (S_y^2 < k)]} \quad \dots(2.12)$$

Jika X dan Y berdistribusi normal kita punya:

$$\frac{nS_x^2}{a^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a}\right)^2 \sim \chi_n^2 \quad \dots(2.13)$$

dan

$$\frac{y_i|x_i}{b\sqrt{1-\rho^2}} \sim N\left(\frac{\rho x_i}{a\sqrt{1-\rho^2}}, 1\right) \quad \dots(2.14)$$

Oleh karena itu,

$$\frac{nS_y^2|x_1, x_2, \dots, x_n}{b^2\sqrt{1-\rho^2}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i|x_i}{b\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2 \sim \chi_{n,(\rho^2/1-\rho^2)}^2 \quad \dots(2.15)$$

dan

$$p = 1 - \int_0^{nk/a^2} \Pr[\chi_{n,(\rho^2/1-\rho^2)}^2 < \frac{nk}{b^2(1-\rho^2)}] \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-t/2} t^{(n/2)-1} dt \quad \dots(2.16)$$

Selanjutnya adalah nilai *Average Run Length (ARL)* dihitung dengan cara:

$$ARL = \frac{1}{1-p} \quad \dots(2.17)$$

Berikut ini akan dipaparkan langkah-langkah penentuan L dan k :

1. Spesifikan nilai n , ρ , ARL_0 , a dan b .
2. Berdasarkan ARL_0 cari nilai k atau $ARL_0 = \frac{1}{p_0} \times \frac{1}{[1-(1-p_0)^L]}$... (2.18)
3. Mulai dengan $L = 1$, cari p_0 yang memenuhi point B.

4. Setelah p_0 diperoleh, cari nilai k .
5. Berdasarkan hasil k , a dan b yang telah ditentukan di point A, hitung nilai p , kemudian hitung ARL out of control (ARL_1).
6. Ulangi dengan $L = 2, L = 3$ dst.
7. Proses dihentikan jika ARL_1 mengalami peningkatan.

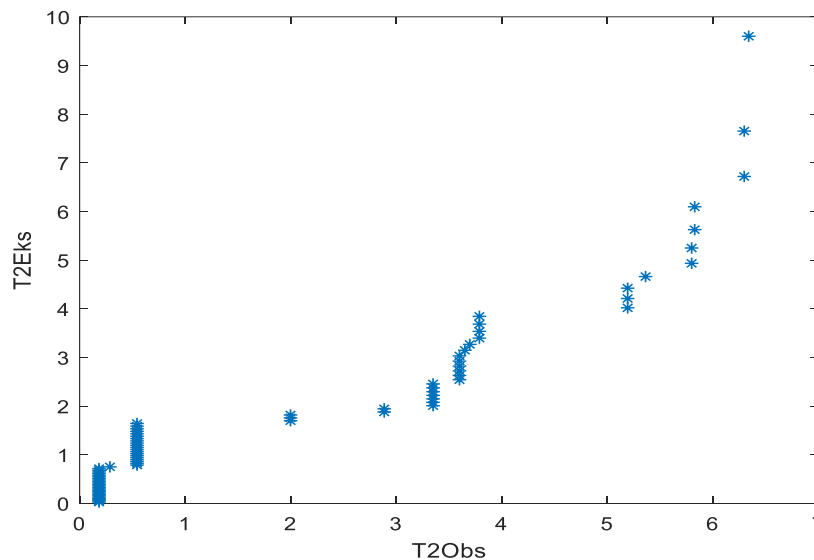
ARL untuk diagram kontrol sintetis (Wu dan Spedding, 2000) adalah:

$$ARL_1 = \frac{1}{p} \times \frac{1}{[1-(1-p)^L]} \quad \dots(2.19)$$

3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pemeriksaan Distribusi Normal Bivariat

Dalam proses bivariat perlu melihat apakah variabel X dan Y mengikuti distribusi normal bivariat atau tidak. Dengan secara visual dapat melihat pola sebaran titik pada *scatter plot* antara $T_i^2(Eks)$ dengan $T_{(i)}^2(Obs)$. Plot pengujian normal bivariat dengan menggunakan *software Matlab*. Berdasarkan **Gambar 1**. menunjukkan bahwa data tersebut bisa dikatakan berdistribusi normal bivariat karena pencaran titik-titiknya cenderung membentuk garis lurus.



Gambar 1. Pengujian Normal Bivariat

Diagram Kontrol Sintetis VMAX

Setelah asumsi distribusi normal bivariat terpenuhi, selanjutnya dilakukan diagram kontrol sintetis VMAX. Diagram kontrol sintetis VMAX dilakukan untuk melakukan pengendalian terhadap varian. Varian proses dapat dituliskan kedalam matriks kovarian yang berukuran $p \times p$. Dari data hasil survei kualitas pelayanan perpustakaan di BPS DKI JAKARTA, didapatkan nilai vektor rata-rata dan matriks kovarian sebagai berikut:

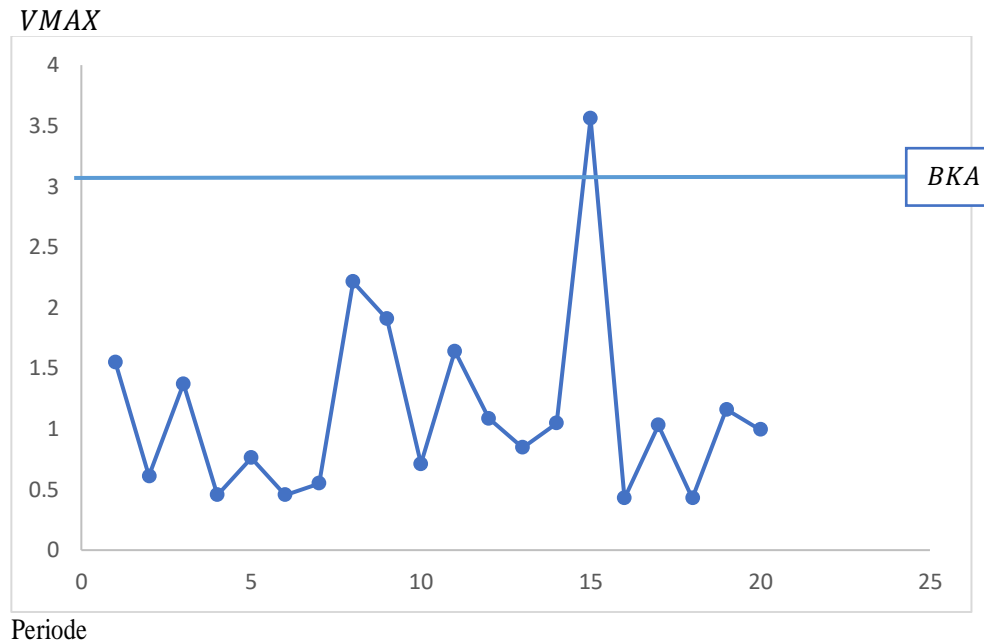
$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 3.4849 \\ 3.4674 \end{pmatrix} \quad \Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1.1525 & 0.8871 \\ 0.8871 & 1.0105 \end{pmatrix}$$

Awalnya menghasilkan 16 sampel dengan proses dalam keadaan terkontrol dengan $n = 5$. Dengan menetapkan vektor rata-rata dan matriks kovarian sampel sebagai parameter proses. Andaikan terjadi pergeseran $c^2 = 2$ diperoleh matriks kovarian menjadi:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1.4068 & 1.1067 \\ 1.1067 & 1.2145 \end{pmatrix}$$

Pada **Gambar 2**. menunjukkan diagram kontrol sintetis VMAX dengan $L = 20$, $n = 5$ diperoleh nilai sebesar $k = 3.011$ artinya terdapat satu sampel yang tidak sesuai yaitu sampel ke-15, karena nilai $CRL = 15 \leq L = 20$, maka diagram kontrol sintetis VMAX proses pelayanan

dalam keadaan yang tidak terkontrol.



Gambar 2. Diagram Kontrol Sintetik *VMAX*

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini maka dapat disimpulkan data hasil survei pelayanan perpustakaan di BPS DKI JAKARTA berasal dari populasi yang berdistribusi normal dari karakteristik kualitas bivariat artinya sesuai dengan salah satu asumsi yang diinginkan dan implementasi pada data pelayanan dengan menggunakan diagram kontrol sintetik *VMAX* menunjukkan bahwa secara variabilitas proses pelayanan tersebut terkontrol. Tetapi, andaikan terjadi pergeseran pada matriks kovarian proses pelayanan tersebut menjadi tidak terkontrol karena terdapat nilai *VMAX* yang berada diluar batas kontrol atas. Oleh karena itu diagram kontrol sintetik *VMAX* lebih cepat dan lebih peka dalam mengidentifikasi variabel *out of control* saat terjadi perubahan proses atau pergeseran.

5. Saran

Adapun saran yang dapat dikemukakan adalah jika ada pembaca yang ingin menggunakan diagram kontrol sintetik berdasarkan varian sampel ini perlu diadakan perbaikan proses karena secara variabilitas proses pelayanan dalam keadaan yang tidak terkontrol dengan cara mengetahui faktor penyebabnya agar pada pelayanan berikutnya berjalan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Alt, F. B. (1985). *Multivariate quality control*, dalam encyclopedia of statistical sciences. Edited by Kotz S. and Johnson N.L, New York: Wiley, 6.
- [2] Bourke, P. D. (1991). *Mendeteksi pergeseran fraksi yang tidak sesuai menggunakan kendali run-length diagram dengan inspeksi 100%*. Journal of Quality Technology, **23** (3), 225–238.
- [3] Davis, R. B. & Woodall W. H. (2002). *Evaluating improving the synthetic control chart*. Journal of Quality Technology, **34**, 200–208.
- [4] Machado, M.A., de Magalhaes, M.S., dan Costa, A.F.B. (2007). *Bagan Kendali VMAX Untuk Memantau Matriks Kovarian* (Online) Vol.18, (https://www.researchgate.net/publication/262545108_The_VMAX_control_chart_for_

- monitoring_the_covariance_matrix, diakses tanggal 16 Juli 2020).
- [5] Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control, Sixth Edition*. New York: John Wiley & Sons,inc.
- [6] Rumus Statistik. (2016). *Distribusi Nomal Bivariat* (Online), (<https://www.rumusstatistik.com/2016/08/distribusi-bivariate-normal.html>, diakses tanggal 4 September 2020).
- [7] Salam, M. I. (2010). *Penentuan Batas-Batas Bagan Kontrol Dispersi Multivariat VV dengan Metode Bootstrap*. Program Pascasarjana, Program Studi Statistika, Universitas Padjadjaran.
- [8] Wu Zhang & Spedding T. A. (2000). *A synthetic control chart for detecting small shifts in the process mean*. *Journal of Quality Technology*, **32**, 32–38.
- [9] Wu Zhang & Yeo SH. (2001). *Implementing synthetic control charts for attributes*. *Journal of Quality Technology*, **33**, 112-114.