PENGGUNAAN KONSEP FUNGSI CONVEX UNTUK MENENTUKAN SENSITIVITAS HARGA OBLIGASI

[1]Zelmi Widyanuarta, [2]Eti Kurniati, Dra., M.Si., [3]Icih Sukarsih, S.Si., M.Si.

Matematika, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

Email: [1]zwidyanuarta@yahoo.com, [2]eti_kurniati0101@yahoo.com, [3]sukarsh@yahoo.co.id

Abstrak. *Tingkat bunga dengan harga obligasi bergerak berlawanan arah. Artinya, sifat obligasi adalah bahwa harga obligasi berbanding terbalik dengan tingkat bunga. Semakin tinggi tingkat bunga, semakin kecil harga obligasi dan sebaliknya. Grafik hubungan tersebut dapat digambarkan sebagai fungsi convex. Tingkat bunga mempengaruhi terhadap harga obligasi. Tingkat bunga yang berlaku dipasar tidak dapat ditentukan dengan pasti karena tingkat bunga dipasar berfluktuasi dengan keadaan di pasar. Permasalahan yang dihadapi adalah seberapa sensitive harga obligasi berubah yang diakibatkan perubahan tingkat bunga. Tujuan dari penulisan artikel ini adalah untuk menentukan sensitivitas harga obligasi karena perubahan tingkat bunga menggunakan deret Taylor sampai orde kedua. Hasil yang diperoleh ternyata untuk perubahan tingkat bunga berapapun dengan menggunakan convexity memberikan hasil yang lebih baik. Tetapi, untuk perubahan tingkat bunga yang kecil dapat menggunakan durasi saja.*

Kata Kunci: Fungsi convex, harga obligasi, durasi, convexity.

A. Pendahuluan

Tingkat bunga dengan harga obligasi bergerak berlawanan arah. Artinya, sifat obligasi adalah bahwa harga obligasi berbanding terbalik dengan tingkat bunga. Semakin tinggi tingkat bunga, semakin kecil harga obligasi dan sebaliknya. Grafik hubungan tersebut dapat digambarkan sebagai kurva yang convex. Tingkat bunga mempengaruhi terhadap harga obligasi. Tingkat bunga yang berlaku dipasar tidak dapat ditentukan dengan pasti karena tingkat bunga dipasar berfluktuasi dengan keadaan di pasar.

Dalam perubahan tingkat bunga terdapat beberapa kondisi yaitu, harga obligasi bergerak berlawanan arah dengan tingkat bunga, tetapi perubahan harga tersebut tidak sama untuk semua obligasi tergantung dengan besar kecilnya perubahan tingkat bunga. Jika perubahan tingkat bunga kecil maka persentase perubahan harga obligasi tertentu hampir sama karena adanya pengaruh negatif dari durasi. Jika perubahan tingkat bunga yang besar maka persentase perubahan harga tidak sama, baik untuk tingkat bunga yang meningkat maupun yang menurun karena adanya pengaruh positif dari convexity sehingga membentuk kurva convex. Untuk perubahan tingkat bunga sebesar *basis point* tertentu, persentase kenaikan harga lebih besar daripada persentase penurunan harga.

Permasalahan yang dihadapi adalah seberapa sensitif perubahan harga obligasi yang diakibatkan oleh perubahan tingkat bunga. Tujuan dari penulisan artikel ini adalah untuk menentukan sensitivitas harga obligasi karena perubahan tingkat bunga menggunakan deret Taylor sampai orde kedua. Dimana orde pertamanya adalah turunan pertama dari persamaan harga obligasi yang disebut durasi. Sedangkan orde kedua tersebut merupakan turunan kedua dari persamaan harga obligasi yang disebut convexity. Durasi dan convexity merupakan ukuran dari sensitivitas harga obligasi karena perubahan tingkat bunga. Hasil yang diperoleh ternyata untuk perubahan tingkat bunga berapapun dengan menggunakan convexity memberikan hasil yang lebih baik. Tetapi, untuk perubahan tingkat bunga yang kecil dapat menggunakan durasi saja.

B. Landasan Teori

i. Deret Taylor (Chapra, 2003)

Teorema Taylor: *Jika fungsi f dan n+1 turunannya kontinu pada selang yang memuat a dan x maka nilai fungsi pada x diberikan oleh*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

(Persamaan 1)

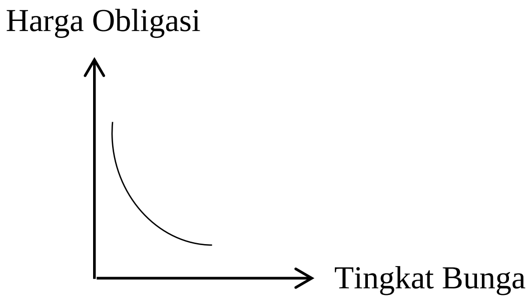
Dengan sisa R_n didefinisikan sebagai

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \qquad \text{(persamaan 2)}$$

Dengan *t* adalah peubah boneka (*dummy variable*). Persamaan 1 disebut *deret Taylor* atau *rumus Taylor*. Jika sisanya dihilangkan, ruas kanan persamaan 1 adalah aproksimasi polinom terhadap *f(x)*, pada hakikatnya teorema itu menyatakan bahwa fungsi-fungsi yang mulus dapat diaproksimasi (dihampiri) oleh polinom. Persamaan 2 yang disebut *bentuk integral* hanyalah salah satu cara bagaimana sisa dapat dinyatakan.

ii. Hubungan Harga Obligasi dan Tingkat Bunga

Ciri dasar obligasi adalah bahwa harga obligasi terjadi dengan arah yang berlawanan dari tingkat bunga (Zubir, 2012).



Gambar 1. Hubungan antara Harga Obligasi dan Tingkat Bunga

Jika tingkat bunga makin besar, maka harga obligasi makin kecil dan sebaliknya. Grafik tersebut tidak berupa garis lurus, tetapi cembung atau *convex* (Zubir, 2012). Sifat obligasi yang berkaitan dengan harga obligasi dan tingkat bunga adalah sebagai berikut:

Sifat 1. Harga obligasi bergerak berlawanan arah dengan tingkat bunga, tetapi perubahan harga tersebut tidak sama untuk semua obligasi.

Sifat 2. Untuk perubahan tingkat bunga yang kecil, persentase perubahan harga obligasi tertentu hampir sama, baik jika tingkat bunga naik maupun turun.

Sifat 3. Untuk perubahan tingkat bunga yang besar, persentase perubahan harga tidak sama, baik untuk tingkat bunga yang meningkat maupun yang menurun.

Sifat 4. Untuk perubahan tingkat bunga sebesar *basis point* tertentu, persentase kenaikan harga lebih besar daripada persentase penurunan harga.

iii. Harga Obligasi

Obligasi adalah surat utang yang diterbitkan oleh pemerintah atau perusahaan untuk mendapatkan dana (Zubir, 2012). Pihak penerbit obligasi tersebut akan membayarkan sejumlah bunga atau sering juga disebut sebagai *coupon*.

Harga obligasi sebuah coupon bond dinyatakan sebagai berikut:

$$P = \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{K}{(1+r)^t}\right] + \frac{M}{(1+r)^T}$$

Dimana P adalah harga obligasi, K adalah kupon obligasi, M adalah nilai pari (*principal*), r adalah tingkat bunga pasar, t adalah periode arus kas, T adalah jangka waktu jatuh tempo (*time to maturity*).

iv. Durasi dan Convexity

Durasi adalah ukuran sensitivitas harga suatu obligasi karena perubahan tingkat bunga yang digunakan untuk mendiskontokan obligasi tersebut (Zubir, 2012). Durasi merupakan turunan pertama dari persamaan harga obligasi terhadap tingkat bunga. Durasi cenderung diinterpretasikan sebagai ukuran rata-rata waktu penerimaan aliran kas. Interpretasi durasi ini tidak bermanfaat karena setelah diketahui bahwa ternyata durasi merupakan ukuran sensitivitas harga obligasi dan hingga saat ini durasi selalu merujuk pada ukuran sensitivitas harga obligasi.

Penggunaan konsep durasi hanya dapat menjelaskan secara baik untuk perubahan tingkat bunga yang kecil tetapi konsep durasi tidak dapat menjelaskan secara baik untuk perubahan tingkat bunga yang besar. Maka dari itu, penggunaan durasi harus diperluas karena perubahan harga obligasi karena perubahan tingkat bunga tidak berupa kurva yang linear melainkan kurva yang cembung (*convex*). Sehingga untuk membantu konsep durasi untuk perubahan tingkat bunga yang besar digunakanlah *convexity* yang dapat membantu dalam memprediksi perubahan harga yang lebih akurat terhadap perubahan tingkat bunga. Convexity adalah turunan kedua harga obligasi terhadap tingkat bunga. Turunan pertama dari harga obligasi adalah durasi (Zubir, 2012).

C. Hasil Penelitian

i. Menentukan Sensitivitas Harga Obligasi Dengan Menggunakan Durasi

Untuk mendapatkan persamaan durasi dan mencari persamaan sensitivitas harga obligasi dapat dipandang dari persamaan harga obligasi *zero coupon* yaitu sebagai berikut.

$$P = \frac{K_t}{(1+r)^t}$$

Turunan pertama dari harga obligasi (P) tersebut terhadap $(1+r)$

$$\delta P = \frac{K_t}{(1+r)^t} \,.\, (-t) \,.\, \frac{\delta(1+r)}{(1+r)}$$

Dari persamaan diatas, terlihat bahwa turunan pertama dari persamaan harga obligasi memberikan hasil yang negatif. Berdasarkan teorema kemonotonan, harga obligasi mempunyai fungsi yang turun dari kiri ke kanan. Hal ini menunjukan bahwa jika tingkat bunga naik maka harga obligasi turun dimana kenaikan dan penurunannya hampir sama.

Coupon bond dapat dipandang sebagai suatu kombinasi dari obligasi *zero coupon*. Sehingga, untuk mendapatkan persamaan tersebut adalah sebagai berikut.

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_T$$

Jika kedua ruas dibagi dengan P_0 maka diperoleh,

$$\frac{\delta P_0}{P_0} = \frac{\frac{K_1}{(1+r)}}{P_0}(-1).\frac{\delta(1+r)}{(1+r)} + \frac{\frac{K_2}{(1+r)^2}}{P_0}(-2).\frac{\delta(1+r)}{(1+r)} + \cdots + \frac{\frac{K_T}{(1+r)^T}}{P_0}(-T)\,.\frac{\delta(1+r)}{(1+r)}$$

Dari persamaan diatas, Durasi dinotasikan sebagai $D = \frac{\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{tK_t}{(1+r)^t}\right]}{P_0}$ dan $\Delta r = \frac{\delta(1+r_1)}{(1+r_1)}$

Turunan pertama dalam persamaan durasi bernilai negatif yang berarti sensitivitas harga obligasi berubah secara linear dari kiri turun ke kanan. Sehingga sensitivitas harga obligasi untuk perubahan tingkat bunga yang kecil, persentase perubahan harga obligasi tertentu hampir sama, baik jika tingkat bunga naik maupun turun. Sehingga menentukan sensitivitas harga obligasi dengan menggunakan durasi dapat ditulis sebagai berikut.

$$\Delta P = -D \times \Delta r$$

ii. Menentukan Sensitivitas Harga Obligasi Dengan Menggunakan Durasi dan Convexity

Konsep durasi dapat menjelaskan dengan baik tentang perubahan harga obligasi akibat perubahan tingkat bunga yang sedikit, akan tetapi konsep durasi tidak dapat menjelaskan dengan baik jika perubahan harga obligasi terhadap tingkat bunga yang besar. Dengan memasukkan efek convexity, perkiraan perubahan harganya semakin mendekati perubahan harga yang sebenarnya sehingga bentuk kurvanya convex.

Telah diketahui persamaan harga obligasi adalah sebagai berikut.

$$P = \sum_{t=1}^{T}\frac{K_t}{(1+r)^t}$$

Turunan pertama dari persamaan diatas terhadap (*1+r*) adalah sebagai berikut.

$$\delta P = -\sum_{t=1}^{T}\frac{tK_t}{(1+r)^t} \times \frac{1}{(1+r)}$$

Selanjutnya akan dicari cari turunan kedua dari harga obligasi adalah sebagai berikut.

$$\delta^2 P = -tK_t\left[\frac{-2}{(1+r)^3} + \frac{-3}{(1+r)^4} + \frac{-4}{(1+r)^5} + \cdots + \frac{-(T+1)}{(1+r)^{T+2}}\right]$$

Selanjutnya kalikan persamaan diatas dengan $\frac{(1+r)^2}{(1+r)^2}$ diperoleh sebagai berikut.

$$\delta^2 P = tK_t\left[\frac{2}{(1+r)^1} + \frac{3}{(1+r)^2} + \frac{4}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{(T+1)}{(1+r)^T}\right] \times \frac{1}{(1+r)^2}$$

Maka diperolehlah turunan kedua dari persamaan harga obligasi adalah sebagai berikut.

$$\delta^2 P = \sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)K_t}{(1+r)^t} \times \frac{1}{(1+r)^2}$$

Dari persamaan diatas terlihat bahwa turunan kedua dari persamaan harga obligasi bernilai positif karena t merupakan periode waktu dari aliran kas dan r adalah tingkat bunga yang berlaku di pasar. Sehingga, persamaan 3.8 dengan mengikuti Teorema Kecekungan yang pertama bahwa kurva akan cekung terbuka keatas.

Jadi, turunan kedua dalam persamaan diatas bernilai positif yang berarti sensitivitas harga obligasi berubah secara cekung terbuka ke atas sehingga dapat dikatakan bahwa untuk perubahan tingkat bunga yang besar, persentase perubahan harga tidak sama baik untuk tingkat bunga meningkat maupun yang menurun karena pola sensitivitas harga obligasi berubah secara cekung terbuka ke atas.

Dari persamaan diatas akan digunakan untuk mendapatkan persamaan dari sensitivitas harga obligasi dengan menggunakan durasi ditambah dengan convexity. Jika *P(r)* adalah harga obligasi dan *r* adalah tingkat bunga maka ditulis sebagai berikut.

$$\Delta P = \frac{P(r+h) - P(r)}{P(r)}$$

Dimana $P(r+h)$ dengan menggunakan ekspansi deret *Taylor* orde kedua adalah sebagai berikut.

$$P(r+h) = P(r) + P'(r)h + \frac{P"(r)h^2}{2!}$$

Sehingga $\Delta P = \frac{P(r+h)-P(r)}{P(r)}$ adalah sebagai berikut,

$$\Delta P = \frac{-\sum_{t=1}^{T} \frac{tK_t}{(1+r)^t} \times \frac{1}{(1+r)}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{K_t}{(1+r)^t}} + \frac{\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{t(t+1)K_t}{(1+r)^t} \times \frac{1}{(1+r)^2}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{K_t}{(1+r)^t}}$$

Persamaan diatas merupakan persamaan sensitivitas harga obligasi dengan durasi ditambah convexity. Dimana pada persamaan diatas mengandung persamaan durasi yaitu, $D = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{tK_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{K_t}{(1+r)^t}}$ dan mengandung persamaan convexity yaitu, $C = \frac{\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{t(t+1)K_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{K_t}{(1+r)^t}}$. Persamaan diatas dapat disimpulkan sebagai berikut.

$$\Delta P = -D\Delta r + C(\Delta r)^2$$

iii. Studi Kasus

Penggunaan durasi dan convexity dengan tujuan sebagai alat ukur sensitivitas harga obligasi karena perubahan tingkat bunga pada data yang digunakan adalah Obligasi Negara RI Seri FR0026 yang terdaftar di Indonesia Bond Pricing Agency. Obligasi tersebut diterbitkan pada tanggal 26 Agustus 2004 dan akan jatuh tempo pada tanggal 15 oktober 2014.

Tabel 1. Data Obligasi

Bond	**Coupon (%)**	**Jatuh Tempo (Tahun)**	**Tanggal Jatuh Tempo**
FR0026	11,00	0,28	15 Oktober 2014

Sumber: www.ibpa.co.id

Obligasi FR0026 adalah obligasi yang memiliki waktu jatuh tempo selama 10 tahun dengan coupon rate 11% (atau nominalnya 8.934.479.000.000) dan pembayaran kupon *semi-annual* (pembayaran setiap 6 bulan), dan nilai nominal (nilai par) sebesar 3.000.000.000.000 (*tiga triliun*). Tingkat bunga yang berlaku saat obligasi diterbitkan adalah sebesar 11% (sumber dari www.bi.go.id). Sedangkan tingkat bunga yang berlaku saat jatuh tempo adalah sebesar 7,50%. Setelah melalui tahap perhitungan sehingga diperoleh durasinya yaitu 7,32539 dan nilai convexitynya yaitu 44,38131.

Pada saat obligasi diterbitkan tingkat bunga yang berlaku adalah 11% dan harga obligasinya adalah Rp.71.519.043,17 dan pada saat jatuh tempo yaitu 10 tahun dengan tipe pembayaran *semi-annual* (pembayaran setiap 6 bulan) tingkat bunga yang berlaku adalah 7,5% dan harga obligasinya adalah Rp. 91.790.533,06. Perubahan harga obligasi dari 11% menjadi 7,5% dengan menggunakan persamaan sensitivitas harga obligasi dengan durasi yaitu sebesar Rp. 86.975.102,19. Jika menggunakan persamaan sensitivitas harga obligasi dengan durasi ditambah convexity adalah Rp. 91.025.411,04. Artinya, dengan menggunakan persamaan sensitivitas harga obligasi dengan durasi ditambah convexity memberikan estimasi harga yang lebih mendekati dengan harga sesungguhnya.

D. Kesimpulan

Hasil yang diperoleh ternyata untuk perubahan tingkat bunga berapapun dengan menggunakan convexity memberikan hasil yang lebih baik. Tetapi, untuk perubahan tingkat bunga yang kecil dapat menggunakan durasi saja.

Berdasarkan studi kasus diperoleh hasil bahwa pada saat obligasi diterbitkan tingkat bunga yang berlaku dipasar adalah 11% diperoleh durasinya adalah 7,32539 dan convexity adalah 44,38131. Apabila tingkat bunga turun 2% dari tingkat bunga awal 11% menjadi 9%, maka harga obligasi naik sebesar Rp. 10.454.903,45 (Rp. 81.973.946,62 – Rp. 71.519.043,17). Apabila tingkat bunga naik 2%, dari tingkat bunga 11% menjadi 13%, maka harga obligasi turun sebesar Rp. 8.419.312,46. Untuk obligasi dengan waktu jatuh tempo 10 tahun tersebut, perubahan tingkat bunga yang sama (2%) yaitu tingkat bunga menjadi 9% harga obligasi naik lebih cepat sebesar Rp. 10.454.903,45. dibanding jika tingkat bunga naik menjadi 13% maka harga obligasi turun sebesar Rp. 8.419.312,46. Mengestimasi harga obligasi dengan menggunakan durasi ditambah convexity memberikan hasil yang lebih mendekati harga sesungguhnya yaitu selisih 0,83% dibanding hanya memperhitungkan durasi saja yang memberikan selisih 5,25%.

E. Daftar Pustaka

Chapra, Steven C., & Canale, Raymond P. (2003). *Numerical Methods Engineers : With Softwere and Programming Application. America* : McGraw-Hill.

Zubir, Zalmi. (2012). *Portofolio Obligasi.* Depok: Salemba Empat.

http://www.bi.go.id/id/moneter/bi-rate/data/Default.aspx

http://www.ibpa.co.id/BondMarketData/BondMaster/IDRGovtBondsSukuks/tabid/79/language/en-US/Default.aspx