Analisis Matematika Model Indeks Tunggal dalam Membentuk Portofolio Optimal

[1]Rahmah Amari Delsa Putri, [2] Eti Kurniati [3] Icih Sukarsih

[1]*Jurusan Matematika, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No. 1 Bandung 40116*

e-mail : [1]scsp_pu2t@yahoo.com,[2]eti_kurniati0101@yahoo.com,[3]sukarsh@yahoo.com

Abstrak. *Sifat harga saham yang fluktuatif dapat memberikan peluang mendapatkan keuntungan yang tinggi tetapi dengan resiko yang tinggi pula bagi seorang investor. Oleh karena itu, apabila seorang investor berinvestasi dalam saham sebaiknya berupa portfolio yang terdiri dari berbagai jenis saham, sehingga apabila salah satu saham harganya jatuh masih ada kemungkinan saham yang lain harganya meningkat. Permasalahan yang muncul dalam menentukan portfolio saham adalah bagaimana memilih saham yang mempunyai kinerja yang baik, dan berapa proporsi masing-masing saham sehingga portfolio tersebut optimal, yaitu menghasilkan return yang tinggi tetapi dengan risiko yang kecil. Tujuan dari penulisan ini adalah untuk menentukan portfolio optimal, dengan terlebih dahulu menentukan saham yang optimal, kemudian menentukan proporsi masing-masing saham dengan menggunakan model Indeks Tunggal. Hasil yang diperoleh adalah bahwa saham optimal diperoleh dari saham yang efisien, yaitu saham dengan nilai ERB (Excess Return to Beta) lebih besar dari nol. Apabila saham efisien telah terpilih, saham optimal ditentukan dari saham efisien yang memiliki nilai ERB (Excess Return to Beta) lebih besar dari nilai C* (cut-off point). Setelah terpilih saham optimal, selanjutnya ditentukan persentasi atau proporsi untuk masing-masing saham optimal sehingga membentuk komposisi portofolio optimal.*

Kata Kunci: Saham,Return, Risiko, Model Indeks Tunggal, Portofolio Optimal

A. Pendahuluan

Harga saham memiliki sifat fluktuatif. Sifat itulah yang menyebabkan harga saham bisa naik dengan sangat tinggi atau bisa turun sangat rendah. Hal ini menyebabkan investasi dalam saham memungkinkan menghasilkan keuntungan yang tinggi tetapi ada kemungkinan mendapatkan kerugian yang tinggi juga. Oleh karena itu, apabila berinvestasi dalam saham sebaiknya tidak hanya satu jenis saham karena memiliki resiko yang terlalu besar. Membentuk portfolio yang terdiri dari beberapa jenis saham akan mengurangi risiko mendapatkan kerugian bagi seorang investor. Hal ini dikarenakan apabila salah satu saham harganya jatuh dapat tertutupi oleh harga saham yang lain yang mungkin justru mengalami kenaikan. Permasalahan yang muncul dalam membentuk portfolio adalah bagaimana memilih jenis saham yang akan masuk dalam portfolio, dan bagaimana menentukan proporsi saham-saham tersebut sehingga membentuk portfolio yang menghasilkan return yang tinggi tetapi memiliki risiko yang kecil, yaitu portfolio optimal (Sharpe, Alexander dan Bailey,1995). Menurut Jogiyanto (2003) adanya hubungan antara *return* saham dengan *return* pasar yang didasarkan pada pengamatan bahwa harga dari suatu sekuritas berfluktuasi searah dengan indeks harga pasar. Secara umum kebanyakan saham cenderung mengalami kenaikkan harga jika indeks harga saham naik. Jika harga saham mengalami kenaikkan, maka saham itu mengalami banyak keuntungan. Oleh karena saham merupakan instrument keuangan yang sangat rentan terhadap kerugian yang disebabkan oleh kejadian yang tidak diduga sehingga yang menjadi acuan adalah pasar. Salah satu model yang cocok digunakan adalah model yang dibentuk oleh William Sharpe pada tahun 1963 yaitu model indeks

tunggal. Model indeks tunggal adalah model yang menyatakan pengaruh perubahan *return* pasar terhadap *return* saham. Menjadi menarik untuk mengkaji secara matematik bagaimana menentukan portfolio optimal menggunakan model indeks tunggal.

B. Landasan Teori

Model indeks tunggal didasarkan pada sebuah asumsi, yaitu bahwa *return* saham bergerak bersamaan dengan pergerakan *return* pasar. Menurut Jogiyanto, secara khusus bahwa kebanyakan saham cenderung mengalami kenaikkan harga jika indeks harga saham naik. Begitu juga sebaliknya, jika indeks harga saham turun kebanyakan saham mengalami penurunan harga. Jika pasar bergerak naik, dalam arti permintaan terhadap saham meningkat, maka harga saham di pasar akan naik pula dan begitu pula sebaliknya. Oleh karena itu, secara statistic hubungan *return* saham dengan *return* pasar dinyatakan dengan persamaan garis lurus sebagai berikut :

$$R_i = a_i + \beta_i R_m \qquad (2.1)$$

Dimana

R_i : *return* saham

R_m : *return* dari indeks pasar

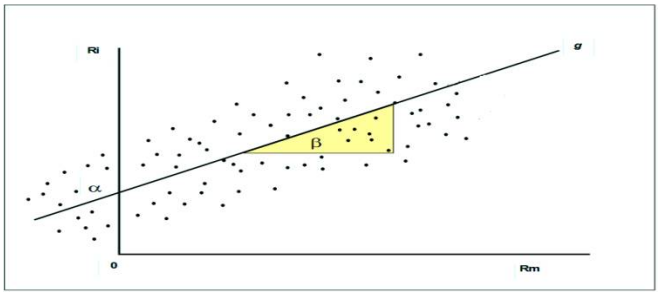
a_i : variabel yang menunjukkan komponen dari *return* saham ke-i yang independen terhadap kinerja pasar

β_i : beta yang merupakan koefisien yang mengukur perubahan R_i akibat perubahan R_m

Dengan $a_i = \alpha_i + e_i$, dimana α_i adalah nilai ekspektasi dari *return* saham yang independen terhadap *return* pasar, maka persamaan (2.1) menjadi

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \qquad (2.2)$$

Antara variabel R_i (return saham) dan R_m (return pasar) saling berpengaruh. Pengaruh tersebut adalah berupa hubungan antara return saham dengan return pasar yang terjadi di model indeks tunggal. Menurut Zalmi Zubir, hubungan tersebut digambarkan dalam gambar berikut ini :



Gambar 1. Hubungan *Return* Pasar Terhadap *Return* Saham

Pada gambar 1, nilai slope (kemiringan) ,disimbolkan dengan β. Berdasarkan slope (kemiringan) gambar tersebut maka terlihat jika *return* pasar (R_m) di koordinat sumbu x bergerak ke ke kanan (ke nilai poisitif yang lebih besar) maka *return* saham (R_i) di koordinat sumbu y juga ikut bergerak ke atas (ke nilai positif yang lebih besar). Oleh karena itu, berdasarkan gambar 1 diatas menunjukkan bahwa ada pengaruh *return* pasar yang positif terhadap *return* saham, sehingga nilai beta dalam model ini adalah nilai beta yang positif.

Persamaan model indeks tunggal di persamaan (2.1) merupakan regresi linear sederhana. Oleh karena itu, $\alpha_i = \overline{R_i} - \beta\overline{R_m}$ dan $\beta = \frac{\sum(R_m - \overline{R_m})(R_i - \overline{R_i})}{\sum(R_m - \overline{R_m})^2}$.

Karena $\sum(R_m - \overline{R_m})(R_i - \overline{R_i}) = \sigma_{im}$ dan $\sum(R_m - \overline{R_m})^2 = \sigma^2{}_m$, sehingga

$$\beta = \frac{\sigma_{im}}{\sigma^2{}_m}$$

Formula (2.2) dapat dinyatakan dalam bentuk return ekpektasi, maka return ekpektasi di model ini adalah

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_m)$$

Dalam model indeks tunggal, terdapat beberapa kaidah, yaitu :

1. $R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$ untuk saham i=1,.....,n
2. $E(e_i) = 0$ untuk saham i=1,.....,n
3. Varian $e_i = E(e_i)^2 = \sigma^2{}_{ei}$untuk semua saham i=1,.....,n
4. Varian $R_m = E(R_m - E(R_m)^2 = \sigma^2{}_m$

Berdasarkan kaidah $E(e_i) = 0$, maka dipenuhi dua hal, yaitu :

1. Diasumsikan bahwa e_i tidak berkovarian dengan R_m (*return* indeks pasar). Kovarian antara kesalahan residu dengan *return* indeks pasar adalah :

$$Cov(e_i, R_m) = 0$$

Karena $E(e_i) = 0$, maka $Cov(e_i, R_m) = E(e_i[R_m - E(R_m)]$ sehingga

$$\boldsymbol{E(e_i[R_m - E(R_m)] = 0} \quad (2.3)$$

2. Diasumsikan kesalahan residu dari sekuritas ke-i tidak berkovarian dengan kesalahan residu sekuritas ke-j atau dengan kata lain e_i tidak mempunyai hubungan dengan e_j. Kovarian antara kesalahan residu sekuritas ke-i dan kesalahan residu sekuritas ke-j adalah :

$$Cov(e_i e_j) = 0$$

Karena $E(e_i) = 0$, maka $Cov(e_i, e_j) = E(e_i, e_j)$ sehingga

$$\boldsymbol{E(e_i, e_j) = 0} \quad (2.4)$$

Untuk mengukur resiko di model indeks tunggal dinyatakan dengan varians dan varians di model ini adalah

$$\sigma^2{}_i = \beta_i{}^2\sigma_m{}^2 + \sigma^2{}_{ei} \quad (2.5)$$

Selain itu, untuk mengetahui hubungan antara dua saham dapat dinyatakan dengan kovarian. Kovarian di model indeks tunggal adalah

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma^2{}_m \quad (2.6)$$

C. Hasil Penelitian

3.1.Menentukan Portofolio Optimal dengan Model Indeks Tunggal

Portfolio optimal ditentukan dengan cara memilih saham optimal yang dipilih dari saham efisien. Tahapan selanjutnya adalah menentukan proporsi masing-masing saham optimal yang telah terpilih.

3.1.1. Menentukan Saham Efisien

Menurut William Sharpe, saham efisien adalah saham yang baik untuk diinvestasikan, yaitu saham yang memiliki kinerja yang baik pada periode sebelumnya. Dalam model indeks tunggal, kinerja saham ditentukan berdasarkan nilai ERB *(Excess*

Return to Beta). Excess Return to Beta (ERB) adalah nilai untuk mengetahui baik atau tidaknya kinerja saham berdasarkan positif atau negatifnya nilai ERB tersebut. Jika nilai ERB bernilai positif atau ERB > 0, maka kinerja saham tersebut dikatakan baik dan begitu pula sebaliknya. Berikut ini adalah formula untuk mendapatkan nilai ERB tersebut :

$$ERB_i = \frac{E(R_i) - R_{br}}{\beta_i} \tag{3.1}$$

Dimana

ERB_i = *excess return to beta* sekuritas ke-i

R_{br} = *return* bebas resiko

Saham efisien adalah saham yang memenuhi kondisi berikut :

$$ERB_i > 0 \tag{3.2}$$

Substitusikan persamaan (3.1) pada pertidaksamaan (3.2) sehingga diperoleh

$$E(R_i) > R_{br} \tag{3.3}$$

Jadi, saham efisien adalah saham yang memiliki nilai return ekspektasi lebih besar dari return asset bebas resiko.

3.1.2. Menentukan Saham Optimal

Menurut Jogiyanto (2013), membentuk portofolio optimal adalah dengan mengoptimalkan sudut portofolio, yaitu menurunkan sudut portofolio tersebut terhadap proporsi masing-masing sekuritas. Sudut portofolio dinyatakan oleh formula berikut :

$$\theta_p = \frac{E(R_p) - R_{br}}{\sigma_p} \tag{3.4}$$

Dimana,

$E(R_p)$: *return* ekspektasi portofolio

R_{br} : *return* bebas resiko

σ_p : resiko portofolio

Dengan menurunkan θ_p terhadap proporsi masing-masing sekuritas (w_k), maka

$$\frac{d\theta_p}{dw_k} = -\sum_{i=1}^{n} w_i[E(R_i) - R_{br}] \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\right]^{-1} \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{jk} + [E(R_k) - R_{br}]$$

Optimal slope diperoleh dengan dengan menyamakan turunan pertama dengan nol,

$$\frac{d\theta_p}{dw_k} = 0$$

Sehingga didapat nilai optimal adalah

$$\frac{-\sum_{i=1}^{n} w_i[E(R_i) - R_{br}]}{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\right]} \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{jk} + [E(R_k) - R_{br}] = 0$$

Mendefinisikan $\psi = \frac{-\sum_{i=1}^{n} w_i[E(R_i) - R_{br}]}{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\right]}$, sehingga

$$\psi\left[\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{jk}\right] = [E(R_k) - R_{br}] \tag{3.5}$$

Dengan mendefinisikan $Z_i = \psi w_i$,maka secara umum

$$Z_i {\sigma^2}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (Z_j \sigma_{ij}) = E(R_i) - R_{br} \tag{3.6}$$

Dimana

Z_i : konstanta untuk proposi saham ke-i

σ^2_i : varians *return* saham ke-i
$\sigma_{i,j}$: kovarians *return* saham ke-i dengan saham ke-j
Dengan mensubusitusikan persamaan (2.5) dan (2.6) ke persamaan (3.6), maka persamaan (3.6) menjadi

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma^2_{ei}}[ERB_i - C^*] \quad (3.7)$$

Dimana C* adalah cut-off point dengan formula $C^*=\frac{\sigma^2 m \sum_{j=1}^{n} ERB_j \frac{\beta_j^2}{\sigma^2 ej}}{1+\sigma^2 m \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma^2 ej}}$

Untuk menghasilkan portofolio yang optimal, maka dibutuhkan nilai proporsi yang positif (Eko Prasetyo, 2004). Agar menghasilkan proporsi yang positif, dibutuhkan nilai konstanta proporsi masing-masing saham yang positif

$(Z_i) > 0.$

Dengan mensubsitusikan persamaan (2.13), maka didapatkan bahwa saham optimal adalah saham yang memiliki

$$ERB_i > C^* \quad (3.8)$$

3.1.3. Menentukan Proporsi Saham untuk Portofolio Optimal

Selanjutnya menentukan proporsi untuk masing-masing saham pada portfolio tersebut agar didapatkan hasil yang optimal dari portofolio. Formula untuk menentukan proporsi pada model indeks tunggal adalah

$$w_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i} \quad (3.9)$$

Dimana w_i adalah bobot atau proporsi dari saham-saham optimal terhadap seluruh saham di portofolio optimal.

3.1.4. Return Ekspektasi dan Resiko Portofolio Optimal

Return ekpektasi dari portofolio optimal diperoleh dengan menggunakan formula berikut :

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) \quad (3.10)$$

Dan varians untuk mengukur resiko portofolio optimal pada model indeks tunggal adalah

$$\sigma_p{}^2 = \sigma_m{}^2 (\sum w_i \beta_i)^2 \quad (3.11)$$

3.2.Aplikasi Model Indeks Tunggal dalam Membentuk Portofolio Optimal

Model Indeks Tunggal akan diaplikasikan dengan data harga 33 jenis saham dan harga pasar IHSG yang masing-masing dihitung rata-rata per-bulan dari bulan Januari 2004-Desember 2006 (data dari Fitria Anggraeni, 2006). Pertama dilakukan pengujian apakah memiliki pengaruh antara return pasar terhadap return saham menggunakan uji T. Syarat perlu untuk uji T adalah data berdistribusi normal, sehingga data tersebut diuji kenormalannya menggunakan metode One Sample Kolmogorov-Smirnov. Dari uji tersebut, data berdistribusi normal dan memiliki pengaruh antara return pasar terhadap return saham. Dalam pemilihan saham optimal, diperlukan nilai ERB untuk masing-masing saham dengan nilai R_{br} dari tingkat suku bunga SBI per-bulan dari tahun 2004-2006. Berikut tingkat suku bunga SBI per-bulan dari tahun 2004-2006 tersebut :

Tabel 1 . Tingkat Suku Bunga Per-Bulan Tahun 2004-2006

Bulan	Tahun		
	2004	2005	2006
Januari	7.86%	7.42%	12.75%

Februari	7.48%	7.43%	12.74%
Maret	7.42%	7.44%	12.73%
April	7.33%	7.70%	12.74%
Mei	7.32%	7.95%	12.50%
Juni	7.34%	8.25%	12.50%
Juli	7.36%	8.49%	12.25%
Augustus	7.37%	9.51%	11.75%
September	7.39%	10.00%	11.25%
Okteber	7.41%	11.00%	10.75%
November	7.41%	12.25%	10.25%
Desember	7.43%	12.75%	9.75%
	89,12%	110.19%	141.96%
R_{br} 1tahun	7.426666667	9.1825	11.83
R_{br} 3Tahun	9.479722222		
R_{br} Perbln	0.263325617		

Sumber : Fitria Anggraeni, 2006

Dengan menggunakan nilai R_{br} per-bulan sebesar 0.263325617%, maka diperoleh nilai ERB masing-masing saham seperti tercantum dalam tabel berikut ini :

Tabel 2. Nilai ERB

No	Saham	Nilai ERB	No	Saham	Nilai ERB	No	Saham	Nilai ERB	No	Saham	Nilai ERB
1	AALI	0.918623	11	HMSP	0.053113	21	BLTA	0.319838	31	HEXA	0.019414
2	ANTM	0.040173	12	AMFG	-0.13831	22	MPPA	0.009816	32	UNTR	0.043288
3	MEDC	0.049635	13	LTLS	0.012978	23	BBCA	0.010656	33	CTRS	0.007246
4	PGAS	0.389605	14	TRST	-0.01637	24	BDMN	0.033567			
5	PTBA	0.046926	15	ASGR	0.00057	25	BMRI	0.018136			
6	TINS	0.022555	16	ASII	0.025865	26	BBRI	0.031201			
7	INDF	0.012863	17	AUTO	0.030962	27	TRIM	0.005919			
8	MYOR	0.0149	18	TURI	0.021321	28	SMRA	0.013754			
9	TBLA	0.013512	19	KAEF	0.060552	29	ADHI	0.050145			
10	GGRM	-0.01546	20	UNVR	0.020056	30	IGAR	-0.00688			

Sumber : Diolah berdasarkan data Fitria Anggraeni tahun 2006

Setelah dilakukan perhitungan nilai ERB, diperoleh saham efisien seperti menurut persamaan (3.2) seperti tercantum dalam tabel berikut :

Tabel 3. Saham Efisien

No	Kode Emiten	Nilai ERB	No	Kode Emiten	Nilai ERB
1	AALI	0.918623	16	KAEF	0.060552
2	ANTM	0.040173	17	UNVR	0.020056
3	MEDC	0.049635	18	BLTA	0.319838
4	PGAS	0.389605	19	MPPA	0.009816
5	PTBA	0.046926	20	BBCA	0.010656
6	TINS	0.022555	21	BDMN	0.033567
7	INDF	0.012863	22	BMRI	0.018136
8	MYOR	0.0149	23	BBRI	0.031201
9	TBLA	0.013512	24	TRIM	0.005919
11	LTLS	0.012978	25	SMRA	0.013754
12	ASGR	0.00057	26	ADHI	0.050145
13	ASII	0.025865	27	HEXA	0.019414
14	AUTO	0.030962	28	UNTR	0.043288
15	TURI	0.021321	29	CTRS	0.007246

Sumber : Diolah berdasarkan data Fitria Anggraeni tahun 2006

Memilih saham optimal berdasarkan saham efisien menurut kriteria di persamaan (2.14) dengan nilai C* sebesar 0.027206. Berikut ini adalah saham optimal yang diperoleh seperti yang tercantum dalam tabel berikut :

Tabel 4. Saham Yang Optimal

No	Kode Emiten	ERB	Beta
1	AALI	0.918623	0.07313
2	PGAS	0.389605	0.184762
3	BLTA	0.319838	0.068439
4	KAEF	0.060552	0.876353
5	HMSP	0.053113	0.36215
6	ADHI	0.050145	0.95337
7	MEDC	0.049635	0.58956
8	PTBA	0.046926	0.987184
9	UNTR	0.043288	1.209477
10	ANTM	0.040173	1.362071
11	BDMN	0.033567	1.025268
12	BBRI	0.031201	1.294409
13	AUTO	0.030962	0.611449

Sumber : Diolah berdasarkan data Fitria Anggraeni tahun 2006

Setelah terpilih saham optimal, selanjutnya menentukan proporsi untuk masing-masing saham optimal tersebut. Berikut ini hasil perhitungan proporsi saham optimal tersebut berdasarkan persamaan (3.9), seperti pada tabel berikut :

Tabel 5. Perhitungan Proporsi

No	Kode Emiten	Z_i	Jumlah Z_i	w_i	w_i(%)
1	AALI	2.599125	14.94194	0.173948	17.39483
2	PGAS	1.258238		0.084208	8.42085
3	BLTA	1.306512		0.087439	8.743925
4	KAEF	0.157908		0.010568	1.056812
5	HMSP	1.499485		0.100354	10.03541
6	ADHI	0.111549		0.007465	0.746549
7	MEDC	1.35344		0.09058	9.057995
8	PTBA	1.395264		0.093379	9.337901
9	UNTR	2.183725		0.146147	14.61473
10	ANTM	1.279404		0.085625	8.5625
11	BDMN	0.754232		0.050477	5.047749
12	BBRI	0.712023		0.047653	4.765266
13	AUTO	0.331037		0.022155	2.215488

Sumber : Diolah berdasarkan data Fitria Anggraeni tahun 2006

Dari proporsi diatas, maka didapatkan besar return ekpektasi dari portofolio tersebut sebesar 4.853695% dengan resiko sebesar 0.01805954%.

D. Kesimpulan

1. Berdasarkan analisis matematika , nilai *cut-off point* yang digunakan untuk menentukan saham optimal dan nilai Z_i yang digunakan untuk menentukan proporsi untuk masing-masing saham dalam portofolio, diperoleh melalui tahapan mengoptimalkan fungsi sudut portofolio (θ_p). Sehingga portofolio yang terbentuk optimal.
2. Dari hasil pengolahan data dari 33 jenis saham diperoleh tiga belas saham yang optimal dengan proporsi masing-masing, yaitu : saham AALI (17,39%), saham PGAS (8,42%), saham BLTA(8,74%), saham KAEF(1,05%), saham HMSP (10,03%), saham ADHI (0,74%), saham MEDC (9,05%), saham PTBA (9,33%), saham UNTR (14,61%), saham ANTM (8,56%), saham BDMN (5,04%), saham BBRI (4,76%), saham AUTO (2,21%). Dari portfolio optimal yang telah terbentuk ini, didapatkan besar *return* yang diharapkan sebesar 4.853695% dengan resiko sebesar 0.01805954%

Daftar Pustaka

Zubir, Zalmi. 1990. *Manajemen Portofolio dan Teori Investasi*. Jakarta : Penerbit Salemba Empat

Steven C. 1991. *Chapra. Metode Numerik Edisi Kedua*. Jakarta:Erlangga

RK.Sembiring.1995. *Analisis Regresi*. Bandung : Penerbit ITB

Dr. Jogiyanto.,2003.*Teori Portofolio dan Analisis Investasi*.,Yogyakarta : Universitas Gajah Mada

Prasetyo, Eko. 2004. *Cara Berinvestasi Saham Yang Baik dan Benar*. Jakarta:Universitas Padjajaran

Priyatno, Duwi. 2011. *Belajar Cepat Olah Data Statistik dengan SPSS*. Yogyakarta : Penerbit Andi

Dr. Jogiyanto. 2013. *Teori Portofolio dengan Excel*. Bulaksumur : Salemba Empat