Menerapkan Pertidaksamaan Cauchy Bunyakovsky Schwarz (CBS) dan Arithmetic Geometric Mean (AGM) Pada Model Economic Order Quantity (EOQ) dengan Backorder

Applying The Cauchy Bunyakovsky Schwarz Inequality (CBS)
and Arithmetic Geometric Mean (AGM) on The Model of
Economic Order Quantity (EOQ) with Backorder

[1]Muhammad Trynadi Zanuar, [2]M. Yusuf Fajar [3] Farid. H. Badruzzaman
[1,2,3]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Ranggamalela No.1 Bandung 40116
email: [1]trynadizanuar@gmail.com, [2]myusuffajar@yahoo.com, [3] faridhbadruzzaman@yahoo.com

Abstrak. Many models of inventory which has been discussed from the literature that there are models Economic Order Quantity (EOQ) with backorder to determine the total inventory cost. However, the inventory models developed generally resolved with the approach of differential calculus. In this paper will discuss another approach to get the total inventory cost. Of the total inventory cost in the EOQ model with backorder modified with algebraic manipulations, be implemented Bunyakovsky Cauchy Schwarz inequality (CBS) and Arithmetic Geometric Mean (AGM) in order to get the total inventory cost EOQ model with backorder. Furthermore applied to the inequalities Arithmetic Geometric Mean (AGM). Of the proposed method finds the total inventory cost, economical lot size and level of economic backorder.

Keywords : Economic Order Quantity, Backorder, Cauchy Bunyakowsky Schwarz, Arithmetic Geometri Mean

Abstrak. Banyak model-model persediaan yang telah dibahas dari berbagai literatur yang ada yaitu model *Economic Order Quantity* (EOQ) dengan *backorder* untuk menentukan total biaya persediaan yang minimum. Namun, model persediaan yang dikembangkan pada umumnya diselesaikan dengan pendekatan kalkulus diferensial. Dalam makalah ini akan dibahas metode pendekatan lain untuk mendapatkan total biaya persediaan yang minimum. Dari total biaya persediaan pada model EOQ dengan *Backorder* dimodifikasi dengan manipulasi aljabar agar diterapkan pertidaksamaan *Cauchy Bunyakovsky Schwarz* (CBS) dan *Arithmetic Geometric Mean*(AGM) sehingga didapat total biaya persediaan model EOQ dengan *Backorder*. Selanjutnya diterapkan pada pertidaksamaan *Arithmetic Geometric Mean*(AGM). Dari metode yang diusulkan didapat total biaya persediaan yang minimum, ukuran lot yang ekonomis dan tingkat Backorder yang ekonomis.

Kata Kunci : Economic Order Quantity, Backorder, Cauchy Bunyakowsky Schwarz, Arithmetic Geometri Mean

A. Pendahuluan

Setiap perusahaan pasti mempunyai tujuan yang sama yaitu memperoleh laba atau keuntungan. Tetapi untuk mencapai tujuan tersebut perlu tindakan atau strategi yang baik karena hal itu dipengaruhi oleh beberapa faktor. Salah satu faktor yang mempengaruhinya yaitu memperhitungkan biaya persediaan. Untuk memperhitungkan biaya persediaan yang minimum dikenal sebuah model dengan istilah *Economic Order Quantity* (EOQ). Pada model EOQ , diasumsikan bahwa pesanan akan datang tepat waktu, sehingga masalah kehabisan persediaan tidak pernah terjadi. Namun, apabila perushaan mengalami kekurangan persediaan maka untuk memperhitungkan biaya persediaan yang minimum digunakan model *Economic Order Quantity* (EOQ) dengan *backorder.*

Salah satu langkah yang di tempuh dalam sistem persediaan adalah pembentukan model matematika masalah persediaan. Model-model persediaan yang dikembangkan pada dasarnya dilakukan penurunan dengan pendekatan kalkulus diferensial. Dalam makalah ini akan dibahas metode pendekatan lain untuk mendapatkan total biaya persediaan yang minimum. Dari total biaya persediaan pada model EOQ dengan *Backorder* dimodifikasi dengan manipulasi aljabar agar diterapkan pertidaksamaan *Cauchy Bunyakovsky Schwarz* (CBS) dan *Arithmetic Geometric Mean*(AGM) di mana kedua teorema ini diterapkan untuk memecahkan beberapa permasalahan pada model matematika.

B. Landasan Teori

Persediaan merupakan suatu model yang umum digunakan untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan usaha pengendalian persediaan dalam satu aktifitas perusahaan. Ciri khas dari model persediaan adalah solusi optimalnya difokuskan untuk menjamin persediaan degan biaya yang serendah-rendahnya.

Secara teknis, inventory adalah suatu teknik yang berkaitan dengan penetapan terhadap besarnya persediaan barang yang harus diadakan untuk menjamin kelancaran dalam kegiatan operasi, serta menetapkan jadwal pengadaan dan jumlah pemesanan barang yang seharusnya dilakukan oleh perusahaan. Penetapan jadwal dan jumlah pemesanan yang harus dipesan merupakan pernyataan dasar yang harus terjawab dalam pengendalian persediaan.

Setiap bagian aset di perusahaan pasti mempunyai biaya begitu juga dengan persediaan. Secara garis besar biaya yang terjadi pada persediaan adalah:

1. Biaya pemesanan adalah biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan pemesanan barang ke supplier.
2. Biaya simpan adalah biaya yang dikeluarkan atas investasi dalam persediaan dan pemeliharaan maupun investasi sarana fisik untuk menyimpan persediaan.
3. Biaya kekurangan persediaan adalah konsekuensi ekonomi atas kekurangan dari luar maupun dari dalam perusahaan.

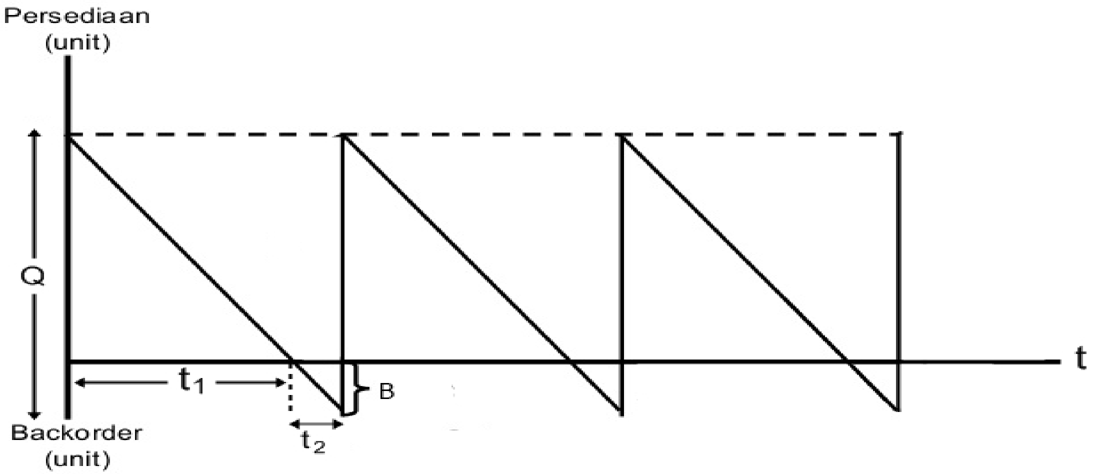
Model kuantitas pesanan ekonomis (*Economic Order Quantity)* EOQ model adalah salah satu teknik pengendalian persediaan yang paling sering digunakan.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Backorder adalah suatu kondisi dalam pendistribusian barang di mana barang yang dipesan tidak atau belum dapat disediakan baik seluruhnya maupun sebagian tetapi konsumen mau menunggu sampai datangnya barang. Artinya penjualan suatu barang tetap akan dilakukan meskipun barangnya tidak ada di gudang atau dengan kata lain tingkat persediaan barang nol.

Asumsi yang digunakan dalam model *Economic Order Quantity* (EOQ) dengan *backorder* ini adalah sebagai berikut:

1. Hanya satu *item* barang yang diperhitungkan
2. Permintaan deterministik dan tetap artinya kebutuhan (permintaan) setiap periode diketahui (tertentu), relatif tetap dan terus-menerus.
3. Struktur biaya tidak berubah, di mana harga per unit barang adalah tetap dan biaya pemesanan serta penyimpanan adalah tetap.
4. Tenggang waktu pengadaan barang = 0
5. Tidak ada *quantity discount*.
6. Diperbolehkan pemesanan tertangguh (*Backorder*)
7. Biaya variabel hanya terdiri atas tiga hal, yakni biaya pesan, biaya simpan dan biaya *backorder*



Gambar 1. persediaan dengan *backorder*

Adapun beberapa notasi yang di gunakan dalam model *Economic Order Quantity (*EOQ) dengan *backorder*.
d = tingkat permintaan
A = biaya pesan
h = biaya simpan
v = biaya backorder
Q = jumlah pesanan
B = tingkat backorder (jumlah backorder) tiap siklus
t_1 = waktu antara saat pemesanan sampai di gudang sampai dengan barang habis
t_2 = waktu antara barang sudah habis sampai dengan pemesanan barang berikutnya sampai di gudang.

Model persediaan yang akan dibahas disini adalah model persediaan EOQ dengan *backorder* menggunakan pertidaksamaan *Cauchy Bunyakowsky Schwarz* (CBS) dan *Arithmetic Geometri Mean* (AGM).

Total biaya persediaan model *Economic Order Quantity (*EOQ) dengan *backorder* adalah

$$TC(Q,B) = \frac{AD}{Q} + \frac{h(Q-B)^2}{2Q} + \frac{vB^2}{2Q} \qquad (1)$$

Teorema 1 Pertidaksamaan *Cauchy Bunyakovsky Schwarz.*
Pertidaksamaan *Cauchy Bunyakovsky Schwarz* adalah sebuah pertidaksamaan dasar yang dapat dinyatakan sebagai berikut:
misalkan $(a_1, a_2, \dots, a_n)\ dan\ (b_1, b_2, \dots, b_n)$ merupakan bilangan-bilangan positif.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \qquad (2)$$

Jika $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ maka,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \qquad (3)$$

Definisi 1 *arithmetic mean* atau rata-rata aritmatik
Arithmetic mean atau rata-rata aritmatik adalah nilai rata-rata dari sekumpulan data yang di hitung.

Dengan sekumpulan data dari $(a_1, \dots, a_n)$

$\bar{x} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$

Difinisi 2 *geometric mean* atau rata-rata geometrik

Geometric mean atau rata-rata geometrik adalah nilai rata-rata dengan menghitung akar pangkat n dari perkalian sekumpulan data.

Dengan sekumpulan data dari $(a_1, \dots, a_n)$.

$\bar{y} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$

Teorema 2 *arithmetic geometric mean*

Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah bilangan positif, maka pertidaksamaan *Arithmetic Geometric Mean* (AGM) dapat dinyatakan sebgaia berikut:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \tag{4}$$

jika $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ maka,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \tag{5}$$

Untuk diterapkan pertidaksamaan (2) dan pertidaksamaan (4) maka persamaan (1) dibuat atau di ubah dengan manipulasi aljabar sehingga biaya total persediaan dengan *backorder* juga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} TC(Q,B) &= \frac{AD}{Q} + \frac{1}{2}\left[\frac{h(Q-B)^2}{Q} + \frac{vB^2}{Q}\right] \\ &= \frac{AD}{Q} + \frac{1}{2}\left[hQ\frac{(Q-B)^2}{Q^2} + vQ\frac{B^2}{Q^2}\right] \\ &= \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left[\frac{h(Q-B)^2}{Q^2} + v\frac{B^2}{Q^2}\right] \end{aligned}$$

$$TC(Q,B) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left\{h\left(1 - \frac{B}{Q}\right)^2 + v\left(\frac{B}{Q}\right)^2\right\} \tag{6}$$

Dari persamaan (6) dapat di ubah kembali dengan manipulasi aljabar agar dapat menerapkan pertidaksamaan (2) dan (4) ke dalam bentuk persamaan berikut:

$$\begin{aligned} TC(Q,B) &= \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left\{h\left(1 - \frac{B}{Q}\right)^2 + v\left(\frac{B}{Q}\right)^2\right\} \\ &= \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left[\left(\sqrt{h}\left(1 - \frac{B}{Q}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{v}\left(\frac{B}{Q}\right)\right)^2\right]\left[\frac{v+h}{h+v}\right] \\ &= \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left[\left(\sqrt{h}\left(1 - \frac{B}{Q}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{v}\left(\frac{B}{Q}\right)\right)^2\right]\left[\frac{v}{h+v} + \frac{h}{h+v}\right] \end{aligned}$$

$$TC(Q,B) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left\{\left[\sqrt{h}\left(1 - \frac{B}{Q}\right)\right]^2 + \left[\sqrt{v}\ \left(\frac{B}{Q}\right)\right]^2\right\}\left\{\left[\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h+v}}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+v}}\right]^2\right\} \tag{7}$$

Bentuk persamaan (7) adalah bentuk yang diperlukan untuk menerapkan peridaksamaan *Cauchy Bunyakovsky Schwarz* (CBS). Dari persamaan (7) misalkan $a_1 = \left[\sqrt{h}\left(1 - \frac{B}{Q}\right)\right]$, $a_2 = \left[\sqrt{v}\ \left(\frac{B}{Q}\right)\right]$, $b_1 = \left[\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h+v}}\right]$ dan $b_2 = \left[\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+v}}\right]$. Dengan diterapkan pertidaksamaan *Cauchy Bunyakovsky Schwarz* (CBS) dalam bentuk seperti di bawah ini.

$$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \; atau$$
$$({a_1}^2 + {a_2}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2.$$
pada persamaan (7) maka di peroleh pertidaksamaan seperti di bawah ini:

$$TC(Q,B) \geq \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left\{\left(\frac{\sqrt{hv}}{\sqrt{h+v}}\right)\left(1-\frac{B}{Q}\right) + \left(\frac{\sqrt{hv}}{\sqrt{h+v}}\right)\left(\frac{B}{Q}\right)\right\}^2 \quad (8)$$

Syarat agar pertidaksamaan (8) menjadi persamaan adalah jika

$$\frac{\sqrt{h}\left(1-\frac{B}{Q}\right)}{\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h+v}}} = \frac{\sqrt{v}\left(\frac{B}{Q}\right)}{\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+v}}} \quad (9)$$

Dengan demikian pertidaksamaan (8) menjadi bentuk persamaan seperti berikut ini:

$$TC(Q,B) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left\{\left(\frac{\sqrt{hv}}{\sqrt{h+v}}\right)\left(1-\frac{B}{Q}\right) + \left(\frac{\sqrt{hv}}{\sqrt{h+v}}\right)\left(\frac{B}{Q}\right)\right\}^2$$
$$= \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left\{\left(\frac{\sqrt{hv}}{\sqrt{h+v}}\right)\left(1-\frac{B}{Q}+\frac{B}{Q}\right)\right\}^2$$
$$TC(Q,B) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}\left\{\frac{hv}{h+v}\right\} \quad (10)$$

Dari persamaan (10) terdapat $\frac{AD}{Q}$ dan $\frac{Q}{2}\left\{\frac{hv}{h+v}\right\}$ dan dapat diterapkan pada pertidaksamaan (4) dalam bentuk $\frac{a_1+\cdots+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ atau $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$. Misalkan $\frac{a_1}{2} = \frac{AD}{Q}$ dan $\frac{a_2}{2} = \frac{Q}{2}\left\{\frac{hv}{h+v}\right\}$. Dengan menerapkan pertidaksamaan (4) pada persamaan (10) maka di peroleh:

$$TC(Q,B) = \frac{\frac{2AD}{Q} + Q\left\{\frac{hv}{h+v}\right\}}{2} \geq \sqrt{\frac{2AD}{Q} \,.\, Q\left(\frac{hv}{h+v}\right)} = \sqrt{\frac{2ADhv}{h+v}} \quad (11)$$

Syarat agar pertidaksamaan (11) menjadi bentuk persamaan adalah jika

$$\frac{2AD}{Q} = Q\left\{\frac{hv}{h+v}\right\} \quad (12)$$

Maka dengan demikian pertidaksamaan (11) menjadi persamaan.

$$TC(Q,B) = \sqrt{\frac{2ADhv}{h+v}} \quad (13)$$

Dari persamaan (12) yang telah didapat maka diperoleh ukuran lot yang ekonomis (Q^*) sebagai berikut:

$$\frac{2AD}{Q} = Q\left\{\frac{hv}{h+v}\right\}$$
$$Q^2 = \frac{2AD(h+v)}{hv}$$
$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD(h+v)}{hv}} \quad (14)$$

Dari persamaan (9) diperoleh tingkat *backorder* yang ekonomis (B^*) sebagai berikut:

$$\frac{\sqrt{h}\left(1-\frac{B}{Q}\right)}{\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h+v}}} = \frac{\sqrt{v}\left(\frac{B}{Q}\right)}{\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+v}}}$$
$$\sqrt{h}\left(1-\frac{B}{Q}\right).\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+v}} = \sqrt{v}\left(\frac{B}{Q}\right).\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h+v}}$$
$$h\left(1-\frac{B}{Q}\right) = v.\frac{B}{Q}$$
$$B(h+v) = Qh$$
$$B = \frac{hQ}{h+v}$$
$$B^* = \frac{hQ^*}{h+v} \quad (15)$$

D. Kesimpulan

1. Dari permasalahan persediaan yang sudah diuraikan, dibuat model *Economic Order Quantity* (EOQ) dengan *backorder.* Total biaya persediaan model (EOQ) dengan *backorder* adalah $\boldsymbol{TC}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{Ad}}{\boldsymbol{Q}} + \frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{B})^2}{2\boldsymbol{Q}} + \frac{\boldsymbol{VB}^2}{2\boldsymbol{Q}}$. selain dengan menggunakan pendekatan kalkulus diferensial, ada metode lain yang dapat diterpkan dalam model *Economic Order Quantity* (EOQ) dengan *backorder* yaitu dengan pertidaksamaan *Cauchy Bunyakowsky Schwarz* (CBS*)* maka total biaya persediaan menjadi $\boldsymbol{TC}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{Q}} + \frac{\boldsymbol{Q}}{2}\left\{\frac{\boldsymbol{hv}}{\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v}}\right\}$ dan dari persamaan tersebut di terapkan pada pertidaksamaan *Arithmetic Geometri Mean* (AGM) maka total biaya persediaan menjadi seperti berikut $\boldsymbol{TC}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{B}) = \sqrt{\frac{2\boldsymbol{ADhv}}{\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v}}}$.
2. Dari model tersebut didapat tingkat backorder yang ekonomis $\boldsymbol{B}^* = \frac{\boldsymbol{hQ}^*}{\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v}}$, ukuran lot yang ekonomis $\boldsymbol{Q}^* = \sqrt{\frac{2\boldsymbol{Ad}(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v})}{\boldsymbol{hv}}}$ dan total biaya persediaan yang minimum $\boldsymbol{TC}^* = \sqrt{\frac{2\boldsymbol{Adhv}}{\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v}}}$.

Daftar Pustaka

Cárdenas-Barrón, “An easy method to derive EOQ and EPQ inventory models with backordered,”Computers and Mathematics with Applications, vol. 59, pp. 948-952, 2010.

Heizer j and Render B. 2015 .*Manajemen keberlangsungan dan rantai pasokan*. Diterjemahkan oleh: Ariyato, Kresnohadi. Jakarta. Salemba Empat.

Miller Steven j., “proofs of the Arithmetic Mean - Geometric Mean Inequality”., Eitan Sayag, and the students of Math 487 (Ohio State, Autumn 2003).

Ristono A. 2009. *Manajemen Persediaan*. Yogyakarta. Graha Ilmu

Wu Hui-Hua and Wu Shanhe. “Proofs of the Cauchy-Schwarz inequality” Department of Mathematics and Computer Science, Longyan University, Longyan, Fujian 364012, P. R. China.