

Model Persediaan dengan Permintaan Bersifat Linier Menggunakan Sistem Penundaan Pembayaran

Inventory Model with Linear Demand using The Payment Delay System

¹Naila Fauziah, ²M.Yusuf Fajar, ³Respitawulan

^{1,2,3}Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung,

Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

email: ¹fauziah.naila29@gmail.com ²mysuffajar@yahoo.com, ³respitawulan@gmail.com

Abstract. In the system of inventory (Inventory) there are problems often faced by decision-makers in determining the inventory in a large or small company. Therefore, companies often use the method of economic order quantity (EOQ). The use of this method it is usually assumed that retailers must pay immediately the goods they will get. In fact the supplier allows to give the time delays in resolving the payment. However, in this paper penecer does not provide payment delay against the buyer. Delays in payment can be obtained, if the amount reached the minimum threshold of orders and payments made are still in the period of the delay. During the period of the delay, retailers can collect revenue from sales. When the payment delay is longer than the time replenishment so retailers will get the income and services of deposits. And when the payment delay time quicker than a replenishment order, retailers have to finance all reservations in cash and pay off the loan payment delays deadline sat over. Retailers can't make a booking it back to the supplier if the payment has not been previously repaid. Therefore, please note the optimal cycle of replenishment and optimal order quantity so that the total cost of supplies retailer minimum.

Keywords: Model Inventory, EOQ , Payment Delay

Abstrak. Dalam sistem persediaan (Inventory) terdapat permasalahan yang sering dihadapi oleh para pengambil keputusan dalam menentukan persediaan di sebuah perusahaan besar maupun kecil. Oleh sebab itu perusahaan seringkali menggunakan metode economic order quantity (EOQ). Penggunaan metode ini biasanya diasumsikan bahwa pengecer harus membayar segera barang yang akan mereka dapatkan. Pada kenyataannya pemasok memungkinkan untuk memberi waktu penundaan dalam menyelesaikan pembayaran. Namun, pada makalah ini penecer tidak memberikan penundaan pembayaran terhadap pembeli (buyers). Penundaan pembayaran dapat diperoleh, apabila jumlah pemesanan mencapai batas minimum order dan pembayaran yang dilakukan masih dalam periode penundaan. Selama periode penundaan, pengecer dapat mengumpulkan pendapatan dari penjualan. Saat penundaan pembayaran lebih panjang dari waktu pengisian ulang maka pengecer akan mendapatkan pendapatan dan jasa deposito. Dan saat penundaan pembayaran lebih cepat dibanding waktu pengisian ulang pemesanan, pengecer harus membiayai semua pemesanan secara tunai dan melunasi pinjaman sat batas waktu penundaan pembayaran berakhir. Pengecer tidak dapat melakukan pemesanan kembali kepada pemasok apabila pembayaran sebelumnya belum dilunasi. Karenanya, perlu diketahui siklus pengisian ulang yang optimal dan kuantitas pesanan yang optimal sehingga total biaya persediaan pengecer minimum.

Kata Kunci: Model Persediaan, EOQ, Penundaan Pembayaran

A. Pendahuluan

Dalam sistem persediaan (Inventory) terdapat permasalahan yang sering dihadapi oleh para pengambil keputusan dalam menentukan persediaan di sebuah perusahaan besar maupun kecil. Persediaan dapat diartikan sebagai barang-barang yang disimpan untuk digunakan atau dijual pada masa atau periode yang akan datang. Salah satu masalah yang dihadapi oleh perusahaan yaitu kesulitan dalam menentukan besarnya persediaan yang harus disediakan untuk memenuhi permintaan.

Oleh sebab itu perusahaan seringkali menggunakan metode *economic order quantity* (EOQ). Penggunaan metode ini biasanya diasumsikan bahwa pengecer harus membayar segera barang yang akan mereka dapatkan. Pada kenyataannya supplier

memungkinkan untuk memberi waktu penundaan dalam menyelesaikan pembayaran. Jika jumlah pemesanan mencapai batas minimum order dan pembayaran yang dilakukan masih dalam periode penundaan, maka pengecer tidak harus membayar bunga. Tetapi jika pembayaran sudah melewati periode penundaan yang ada, maka supplier atau pemasok akan mengenakan sejumlah biaya (jasa bank) kepada pengecer. Selama periode penundaan, pengecer dapat mengumpulkan pendapatan dari penjualan. Apabila dilakukan penundaan pembayaran, maka perlu diketahui bagaimana pengaruh lama periode penundaan pembayaran terhadap banyaknya pesanan. Pengecer tidak dapat melakukan pemesanan kembali kepada supplier apabila pembayaran sebelumnya belum dilunasi.

Berdasarkan kondisi tersebut, dibutuhkan adanya suatu formulasi model EOQ untuk menentukan jumlah pemesanan persediaan yang optimal dan siklus pemesanan yang optimal sehingga total biaya persediaan minimum.

B. Landasan Teori

Persediaan adalah barang-barang yang disimpan untuk digunakan atau dijual pada masa atau periode yang akan datang. Persediaan terdiri dari persediaan bahan baku, persediaan barang setengah jadi dan persediaan barang jadi. Dengan demikian setiap perusahaan yang melakukan kegiatan usaha umumnya memiliki persediaan. (Ristono, 2009).

Biaya dalam persediaan

1. Biaya penyimpanan (holding cost) adalah biaya - biaya yang berkaitan dengan penyimpanan persediaan sepanjang waktu tertentu.
2. Biaya pemesanan (ordering cost) adalah biaya - biaya yang berkaitan dengan pasokan, formulir, pemrosesan, pemesanan dan tenaga para pekerja.

Metode Least-Square

Salah satu bentuk metode trend linier adalah Metode *Least Square*. Untuk mendapatkan laju perubahan persediaan dengan rumus $f(t) = a + bt$ digunakan perhitungan trend linier dengan mengikuti persamaan garis :

$$Y = a + bX$$

dengan :

Y = data berkala (time series) = taksiran nilai trend.

a = nilai trend pada tahun dasar.

b = rata-rata pertumbuhan nilai trend tiap tahun.

X = variabel waktu (hari, minggu, bulan atau tahun).

Untuk melakukan penghitungan, maka diperlukan nilai tertentu pada variabel waktu (x) sehingga jumlah nilai variabel waktu adalah nol atau $\sum x = 0$.

Untuk n ganjil maka :

- Jarak antara dua waktu diberi nilai satu satuan.
- Di atas 0 diberi tanda negative

Untuk n genap maka :

- Jarak antara dua waktu diberi nilai dua satuan.
- Di atas 0 diberi tanda negatif
- Dibawahnya diberi tanda positif.

Untuk mencari besarnya nilai a dan b tersebut akan dapat dilakukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut :

$$a = \frac{\sum Y}{n}, b = \frac{\sum XY}{\sum X^2}$$

C. Pembahasan

Model Persediaan Dengan Penundaan Pembayaran

Pada saat ($t=0$) pengecer melakukan pemesanan dan menerima Q unit dari pemasok. Tingkat persediaan habis secara bertahap tetapi tidak diperbolehkan kekurangan persediaan dalam interval $[0,T]$. Pada waktu $t=T$ tingkat persediaan mencapai nol, karena jumlah persediaan berkurang setiap waktu sebesar $a + bt$. Secara matematis, perubahan tingkat persediaan $I(t)$ terhadap waktu sebagai berikut :

$$\frac{dI(t)}{dt} = -(a + bt), \quad 0 \leq t \leq T$$

Dengan syarat batas $I(T) = 0$, sehingga

$$I(t) = \int -(a + bt)dt = -\left(at + \frac{bt^2}{2} + c\right) = -at - \frac{bt^2}{2} + c$$

Substitusikan syarat batas $I(T) = 0$, diperoleh :

$$-aT - \frac{bT^2}{2} + c = 0 . \text{ Kemudian substitusikan nilai } c \text{ ke dalam } I(t), \text{ akan didapat :}$$

$$I(t) = -aT - \frac{bT^2}{2} + aT + \frac{bT^2}{2} = a(T - t) + \frac{b}{2}(T^2 - t^2) \tag{1}$$

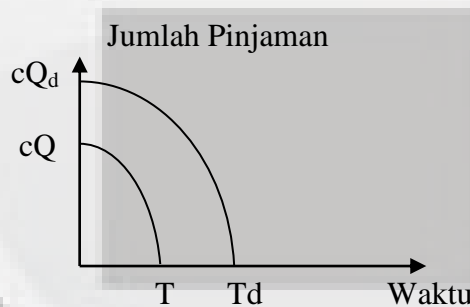
Sehingga kuantitas order pengecer per pengisian ulang per tahun adalah :

$$Q = I(0) = aT + \frac{bT^2}{2} \tag{2}$$

Dalam pembahasan ini terdapat dua kasus utama yaitu :

1. Pemesanan lebih kecil dari batas minimum order $Q < Q_d$
2. Pemesanan lebih besar atau sama dengan batas minimum order $Q_d \leq Q$

Kasus 1. $Q < Q_d$



Gambar 1. Jumlah pinjaman untuk $Q < Q_d$

Jumlah pinjaman yang dimaksud adalah saat pengecer melunasi pemesanan, dengan menggunakan peminjaman ke bank, dapat dilihat ketika pemesanan dilakukan, pengecer melakukan pemesanan barang kurang dari batas minimum order yang telah ditentukan oleh pemasok. Oleh sebab itu pengecer tidak mendapatkan penundaan pembayaran dari pemasok, sehingga pembayaran untuk pemesanan dalam kasus ini segera dilakukan. Dengan demikian, menggunakan perubahan tingkat persediaan pada persamaan (1) maka jasa yang dibayarkan pengecer adalah

$$CI_p \left[\int_0^T I(t)dt \right] = CI_p \left[\int_0^T \left(a(T - t) + b \left(\frac{T^2 - t^2}{2} \right) \right) dt \right] = CI_p \left[\frac{aT^2}{2} + \frac{bT^3}{3} \right] \tag{3}$$

Keterangan :

c = Harga pembelian per unit.

T = Waktu pengisian ulang per tahun.

I_p = Jasa yang dibayar per tahun oleh pengecer.

Salah satu komponen biaya adalah biaya simpan (h), yang totalnya dapat dihitung menggunakan persamaan :

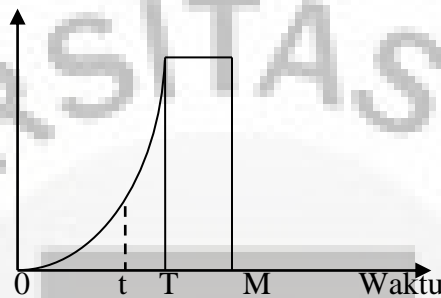
$$h \int_0^T I(t) dt = h \int_0^T \left(a(T-t) + \frac{b}{2}(T^2 - t^2) \right) dt = h \left[\frac{aT^2}{2} + \frac{bT^3}{3} \right] \quad (4)$$

Sehingga total biaya tahunan per satuan waktu untuk pengecer dalam kasus ini adalah :

$$Z_1(T) = \left\{ \frac{A + h \int_0^T I(t) dt + cI_p \left[\int_0^T I(t) dt \right]}{T} \right\} = \frac{A}{T} + (h + cI_p) \left(\frac{aT}{2} + \frac{bT^2}{3} \right) \quad (5)$$

Kasus 2. $Q \geq Q_d$

Pada kasus ini pengecer melakukan pemesanan barang lebih besar atau sama dengan batas minimum order yang ditetapkan oleh pemasok, maka pengecer mendapat penundaan pembayaran dengan batas akhir waktu yang telah disepakati. pendapatan



Gambar 2. pendapatan untuk $M > T$

Pengecer menerima pendapatan dan mendepositkan sebagian untuk memperoleh jasa pada interval waktu $[0, T]$, saat waktu M pendapatan yang didapatkan pengecer telah memenuhi pembayaran M tersebut. Dengan melihat pada gambar, maka jasa yang diterima oleh pengecer adalah :

$$pI_e \left[\int_0^T [I(0) - I(t)] dt + \int_T^M I(0) dt \right] = pI_e \left[\frac{aT^2}{2} + \frac{bT^3}{6} + \left(aT + \frac{bT^2}{2} \right) (M - T) \right] \quad (6)$$

Keterangan :

M = Jangka waktu penundaan pembayaran pengecer yang ditawarkan oleh pemasok pertahun

p = Harga jual per unit

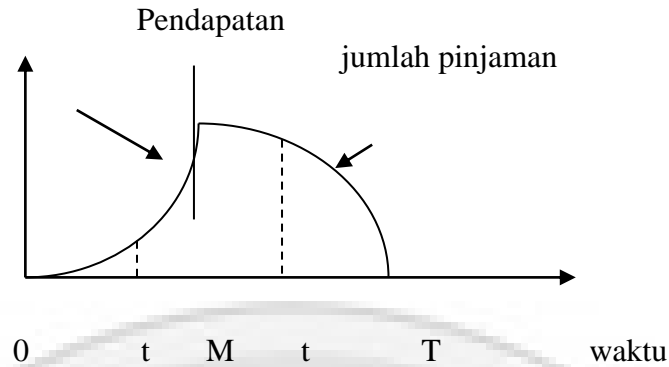
I_e = Jasa yang diperoleh per tahun oleh pengecer

Jadi, total biaya persediaan per tahun untuk pengecer per satuan waktu (Z_2), jumlah biaya pesan (A), total biaya simpan (h) dan total jasa yang didapatkan pengecer (pI_e) per siklus sehingga :

$$Z_2(T) = \frac{\left\{ A + h \int_0^T I(t) dt + -pI_e \left[\int_0^T (I(0) - I(t)) dt + \int_T^M I(0) dt \right] \right\}}{T} = \frac{A}{T} + (h + pI_e) \left(\frac{aT}{2} + \frac{bT^2}{3} \right) - pI_e \left(a + \frac{bT}{2} \right) (M) \quad (7)$$

Kasus 2.2 $M < T$

Dalam kasus ini, pengecer mendapatkan penundaan pembayaran dari pemasok, waktu penundaan pembayaran lebih cepat dibanding waktu pengisian ulang pesanan



Gambar 3. jumlah pinjaman dan pendapatan untuk $M < T$

Oleh sebab itu, pengecer harus membiayai semua pemesanan secara tunai dan melunasi pinjaman saat M pada tingkat suku bunga seperti yang ditunjukkan dalam gambar. Jasa yang dibayarkan oleh pengecer adalah

$$cI_p \int_M^T I(t - M)dt = cI_p \left[a \left(\frac{T^2}{2} - TM \right) + \frac{b}{6} (2T^3 - 3T^2M + 3TM^2 - 2M^3) \right] \quad (8)$$

Saat pengecer mulai menjual produk pada waktu 0, akibatnya pengecer memperoleh pendapatan penjualan yang mendapatkan bagi hasil per tahun. Oleh sebab itu, bagi hasil yang diperoleh :

$$pI_e \int_0^M [I(0) - I(t)]dt = pI_e \left(\frac{aM^2}{2} + \frac{bM^3}{6} \right) \quad (9)$$

Sehingga, total biaya persediaan per tahun untuk pengecer per satuan waktu adalah

$$Z_3(T) = \frac{\left(A + h \int_0^T I(t)dt + cI_p \int_M^T I(t - M)dt - pI_e \int_0^M [I(0) - I(t)]dt \right)}{T}$$

$$= \frac{A + h \left(\frac{aT}{2} + \frac{bT^2}{3} \right) cI_p \left(\frac{a(T^2 - M^2)}{2} + \frac{b}{6} (2T^3 - 3TM^2 + M^3) \right) - pI_e \left(\frac{aM^2}{2} + \frac{bM^3}{6} \right)}{T} \quad (10)$$

Meminimumkan Total Biaya Persediaan

Siklus pengisian (T) dikatakan optimal jika $T < T_d$. Untuk mendapatkan siklus pengisian optimal per tahun, perlu dicari turunan pertama dan kedua untuk $Z_i(T)$ untuk $i = 1, 2$ dan 3 terhadap T dengan merujuk pada Teng,(2013).

Kasus 1 dari persamaan (5), turunan pertama dan kedua Z_1 terhadap T adalah :

$$\frac{dZ_1(T)}{dT} = \frac{-A}{T^2} + (h + cI_p) \left(\frac{a}{2} + \frac{2bT}{3} \right) \quad (11)$$

$$\frac{d^2Z_1(T)}{dT^2} = \frac{2A}{T^3} + \frac{2b(h + cI_p)}{3} > 0 \quad (12)$$

$$\frac{dZ_1(T)}{dT} = 0$$

$$\frac{dZ_1(T)}{dT} = \frac{-A}{T^2} + (h + cI_p) \left(\frac{a}{2} + \frac{2bT}{3} \right) = 0$$

$$T^3 + \frac{3a}{b}T^2 - \frac{3A}{2b(h + cI_p)} = 0 \quad (13)$$

Nilai siklus pengisian optimum T_1^* didapat dengan mencari solusi real positif
 Matematika, Gelombang 1, Tahun Akademik 2016-2017

dari persamaan (13).

Kasus 2 dimana $M > T$ nilai T optimal akan dicari menggunakan turunan pertama dan kedua Z_2 menggunakan persamaan (7) diperoleh :

$$\frac{dZ_2(T)}{dT} = \frac{-A}{T^2} + (h + pI_e) \left(\frac{a}{2} + \frac{bT}{3} \right) - bpI_e \left(\frac{M}{2} \right) \quad (14)$$

$$\frac{d^2Z_2(T)}{dT^2} = \frac{2A}{T^3} + \frac{2b(h + pI_e)}{3} > 0 \quad (15)$$

$$\frac{dZ_2(T)}{dT} = \frac{-A}{T^2} + (h + pI_e) \left(\frac{a}{2} + \frac{2bT}{3} \right) - bpI_e \left(\frac{M}{2} \right)$$

$$T^3 + \left(\frac{3a}{b} - \frac{3pI_e M}{(h + pI_e)} \right) T^2 - \frac{3A}{2b(h + pI_e)} = 0 \quad (16)$$

Nilai siklus pengisian optimum T_2^* didapat dengan mencari solusi real positif dari persamaan (16).

Kasus 3 dimana $M < T$ nilai T optimal akan dicari menggunakan turunan pertama dan kedua Z_3 pada persamaan (10) diperoleh :

$$\frac{dZ_3(T)}{dT} = \frac{-A}{T^2} + (h + cI_p) \left(\frac{a}{2} + \frac{2bT}{3} \right) + (M^2) \frac{\left[cI_p \left(\frac{a}{2} - \frac{bM}{6} \right) + pI_e \left(\frac{a}{2} - \frac{bM}{6} \right) \right]}{T^2} \quad (17)$$

$$\frac{d^2Z_3(T)}{dT^2} = \frac{2A}{T^3} + \frac{2b(h + cI_p)}{3} - (M^2) \frac{\left[cI_p \left(a - \frac{bM}{3} \right) + pI_e \left(a + \frac{bM}{3} \right) \right]}{T^3} \quad (18)$$

$$T^3 + \frac{3a}{b} T^2 + (M^2) \frac{\left[cI_p \left(\frac{a}{2} - \frac{bM}{6} \right) + pI_e \left(\frac{a}{2} - \frac{bM}{6} \right) \right] - A}{\frac{2b}{3}(h + cI_p)} = 0 \quad (19)$$

Nilai siklus pengisian optimum T_3^* didapat dengan mencari solusi real positif dari persamaan (19).

Contoh Kasus

Dari data penjualan didapat fungsi permintaan menggunakan metode *leastsquare* (perhitungan lengkap dapat dilihat di lampiran) yaitu :

$f(t) = 1041,67 + 10,49t$ per tahun

$A = \text{Rp. } 300.000,-/\text{pemesanan}$

$h = \text{Rp. } 1.000,-/\text{tahun/kilogram}$

$c = \text{Rp. } 15.000,-/\text{kilogram}$

$p = \text{Rp. } 24.000,-/\text{kilogram}$

$I_p = 0,06/\text{tahun}$

$I_e = 0,05/\text{tahun}$

Karena T_d adalah waktu habisnya persediaan saat Q_d , maka dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan (2) = Q_d diperoleh :

$$\int_0^{T_d} f(t) dt = Q_d$$

$$1041,67 T_d + \frac{10,49 T_d^2}{2} - 500 = 0$$

Solusi real positifnya adalah $T_d = 0,4788$

Selanjutnya, akan dicari total biaya minimum $Z_i(T_i^*)$, siklus pengisian ulang

optimum T_i^* , dan kuantitas pemesanan optimum Q_i^* untuk 3 kasus yang telah dijabarkan pada subbab 3.2 dan 3.3.

Kasus 1 $Q < Q_d$ maka diperoleh :

T^* dapat dicari dari persamaan (13) substitusikan data menggunakan perhitungan numerik maka $T_1^* = 0,2752$ tahun = 85,58 hari

Q^* dapat dicari dengan mensubstitusikan T_1^* ke persamaan (2) didapat $Q_1^* = 287,065$

Jadi, jumlah pemesanan optimal adalah 287 kilogram.

$Z(T)$ dapat dicari dengan cara masukkan nilai yang sudah ada ke persamaan (5) dengan menggunakan T_1^* .

Jadi, total biaya minimum untuk kasus ini adalah $Z_1(T_1^*) = \text{Rp.}1.362.954,-/\text{tahun}$

Kasus 2 $Q \geq Q_d$ dimana $M > T$ didapat :

T^* dapat dicari dari persamaan (16) substitusikan data, menggunakan perhitungan numerik maka $T_2^* = 0,2563$ tahun = 79,709 hari;

Q^* dapat dicari dengan mensubstitusikan T_2^* ke persamaan (2) diperoleh $Q_2^* = 267,3245$;

Jadi, jumlah pemesanan optimal adalah 267 kilogram.

$Z(T)$ dapat dicari dengan cara masukkan nilai yang sudah ada ke persamaan (10) dengan menggunakan T_2^* .

Jadi, total biaya minimum untuk kasus ini adalah $Z_2(T_2^*) = \text{Rp.} 1.360.358,-/\text{tahun}$

Kasus 3 $Q \geq Q_d$ dimana $M < T$ akan didapat :

T^* dapat dicari dari persamaan (19) substitusikan data menggunakan perhitungan numerik maka $T_3^* = 0,4824$ tahun = 150,02 hari

Q^* dapat dicari dengan mensubstitusikan T_3^* yang diperoleh di substitusikan ke persamaan (2) diperoleh $Q_3^* = 503,7221$

Jadi, jumlah pemesanan optimal adalah $Q_3^* = 503,7221$ kilogram

$Z(T)$ dapat dicari dengan cara masukkan nilai yang sudah ada ke persamaan (10) dengan menggunakan T_3^* maka $Z_3(T_3^*) = 619.447$

Jadi, total biaya minimum untuk kasus ini adalah $Z_3(T_3^*) = \text{Rp.} 619.447,-/\text{tahun}$.

D. Kesimpulan

Dari permasalahan yang diuraikan, siklus pengisian yang optimal (T^*) siklus yang diberikan biaya minimum, sehingga dapat dihitung dengan turunan pertama dan kedua dari $Z_i(T) = 0$ dan kuantitas pesanan yang optimal Q^* didapat dengan mensubstitusikan nilai T^* ke persamaan $Z_i(T)$.

Jika didapatkan penundaan pembayaran maka pengecer mendapat keuntungan dari pendapatan dan jasa deposito yang dilakukan pengecer. Jika penundaan pembayaran lebih pendek dari waktu pengisian ulang maka pengecer akan mendapatkan terlebih dahulu jasa deposito dan akan melakukan pinjaman untuk melunasi pemesanan pada waktu M sehingga dikenakan jasa yang harus dibayar oleh pengecer.

Siklus pengisian optimal berpengaruh terhadap kuantitas pemesanan optimal dan juga total minimum yang harus dikeluarkan oleh pengecer. Penundaan pembayaran dapat meminimumkan total biaya tahunan yang dikeluarkan pengecer

Daftar Pustaka

- Render, B. (2004). Prinsip-Prinsip Manajemen Operasi. Salemba Empat.
 Ristono, A. (2009). Manajemen Persediaan. Yogyakarta: Graha Ilmu.
 Teng, J.-T. (2013). Applied Mathematical Modelling . An inventory model for increasing demand under two levels of trade credit linked to under quantity 7624-7632.