Menentukan Model Sisa Hutang Kredit Menggunakan Persamaan Beda Linier Orde Satu

Determine The Residual Credit Debt Model Using Linear Difference Equation of One Order

[1]Fitri Lestari, [2]Onoy Rohaeni

[1,2,3]*Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Ranggamalela No.1 Bandung 40116*

email: [1]pilefitri@gmail.com,[2]onoyrohaeni@gmail.com, [3]eti_kurniati0101@yahoo.com

Abstract. Real world conditions can be illustrated using a mathematical model by forming an equation. Problems in the real world can be categorized in the form of discrete and continuous occurances. One of the models used to describe continuous is the differential equation, while discrete problems use the linear difference equation. One of the problems often encountered in real word conditions for the discrete category is the calculation needed to consider repayments for loans from the bank because said repayments are associated with interest that are paid annually. The purpose of this article is to apply a linear difference equation of one order to count the number of remaining debt owned by the customer based on single interest and compound interest. The results obtained are forming model $S_{n+1} = P_0 + \frac{nr}{100} P_0 - A$ for single interest and $S_{n+1} = P_n + \left(\frac{nr}{100}\right)^n P_0 - A$ for compound interest.

Keywords: credit, debt, linear difference equations of order one, single simple interest, compound interest.

Abstrak. Model matematika dapat menggambarkan kondisi nyata dalam perumusan matematika. Permasalahan dalam dunia nyata dapat dikategorikan dalam bentuk diskrit dan kontinu. Salah satu model untuk masalah kontinu adalah menggunakan persamaan differensial. Sedangkan salah satu model untuk masalah diskrit adalah menggunakan persamaan beda. Salah satu masalah yang sering dijumpai didunia nyata yang merupakan kategori diskrit adalah perhitungan pengembalian suatu pinjaman di bank karena terkait bunga yang dibayar per tahun. Tujuan dari penulisan ini adalah menerapkan persamaan beda linier orde satu untuk menghitung jumlah sisa hutang yang dimiliki nasabah yang didasarkan pada bunga tunggal dan bunga majemuk. Hasil yang diperoleh adalah membentuk model $S_{n+1} = P_0 + \frac{nr}{100} P_0 - A$ untuk bunga tunggal dan $S_{n+1} = P_n + \left(\frac{nr}{100}\right)^n P_0 - A$ untuk bunga majemuk.

Kata kunci: kredit, sisa hutang, persamaan beda linier orde satu, bunga tunggal, bunga majemuk.

A. Pendahuluan

Model matematika dapat menggambarkan kondisi nyata dalam suatu perumusan matematika. Permasalahan dalam dunia nyata dapat dikategorikan dalam bentuk diskrit dan kontinu. Salah satu model untuk masalah kontinu adalah menggunakan persamaan differensial. Sedangkan salah satu model untuk masalah diskrit adalah menggunakan persamaan beda. Dalam banyak hal solusi persamaan differensial lebih sulit dipecahkan sedangkan model persamaan beda lebih mudah dipecahkan. Salah satu masalah yang sering dijumpai didunia nyata yang merupakan kategori diskrit adalah perhitungan pengembalian suatu pinjaman di bank karena terkait bunga yang dibayar per tahun.

Pengembalian suatu pinjaman di bank akan melipat, hal tersebut akan memberatkan para nasabah. Jika nasabah memiliki uang di tengah jangka waktu pinjaman biasanya nasabah ingin melunasi sisa hutangnya.

Oleh karena pelunasan hutang kredit terkait dengan pembayaran bunga setiap bulannya, maka masalah tersebut termasuk permasalahan dalam bentuk diskrit, sehingga persamaan beda linier orde satu bisa digunakan untuk menghitung jumlah sisa hutang yang dimiliki nasabah yang didasarkan pada bunga tunggal dan bunga majemuk. Permasalahannya adalah : “Bagaimana menentukan model sisa hutang kredit menggunakan persamaan beda linier orde satu?”. Tujuan penulisan ini yaitu untuk mengetahui model sisa hutang kredit menggunakan persamaan beda linier orde satu.

B. Landasan Teori

1. Bunga Tunggal

Bunga tunggal diperoleh dari nilai awal pokok hutang dan bunganya tetap sama sepanjang waktu pinjaman. Misalnya P menyatakan pokok, yaitu besarnya pinjaman atau modal pertama, dan i adalah tingkat bunga setahun. Hal ini berarti bahwa pada akhir tahun besarnya bunga adalah iP, sehingga besarnya bunga dan pokok pada akhir tahun menjadi $P + iP$.

Bila bunga tidak menghasilkan bunga (bunga tunggal) maka banyaknya bunga pada akhir tahun kedua adalah $2iP$, dan pada akhir tahun ke-n menjadi niP, sehingga jumlah pokok dengan bunganya menjadi $P + niP$. Bila jumlah bunganya dengan pokoknya pada akhir tahun ke-n dinyatakan dengan P_n, maka menurut perhitungan bunga tunggal, diperoleh :

$$P_n = P + niP = P(1+ni)$$

2. Bunga Majemuk

Bunga majemuk merupakan bunga yang dibungakan, artinya bunga majemuk dihitung berdasarkan jumlah modal dengan bunga yang lalu. Jika suatu besar pokok awal P rupiah diinvestasikan pada suatu bank dengan sistem bunga majemuk i pertahun, maka bunga tahun pertama adalah iP, sehingga jumlah besar pokok ditambah dengan besar bunga tahun pertama menjadi :

$$P_1 = P(1+i)$$

Jumlah ini merupakan pokok yang baru pada permulaan tahun ke-2. Bunga tahun kedua adalah $i.P(1+i)$, sehingga jumlah besar pokok ditambah dengan besar bunga tahun kedua menjadi :

$$\begin{aligned} P_1 + iP_1 = P(1+i) + i.P(1+i) &= (1+i)[P+Pi] \\ &= P(1+i)(1+i) \\ &= P(1+i)^2 \end{aligned}$$

Jadi pada permulaan tahun ke-3 diperoleh pokok yang baru, yaitu :

$$P_2 = P(1+i)^2$$

Bunga tahun ketiga adalah $i.P(1+i)^2$, sehingga jumlah besar pokok ditambah dengan besar bunga tahun ketiga menjadi :

$$\begin{aligned} P(1+i)^2 + i.P(1+i)^2 &= (1+i)^2[P+Pi] \\ &= (1+i)^2P(1+i) \\ &= P(1+i)^2(1+i) \\ &= P(1+i)^3 \end{aligned}$$

3. Sisa Hutang

Hutang adalah kewajiban suatu badan usaha atau perorangan kepada pihak lain yang dibayar dengan cara menyerahkan jasa/sejumlah uang dalam jangka waktu tertentu sebagai akibat dari transaksi di masa lalu. Hutang biasanya digunakan oleh masyarakat dalam kontek pemberian pinjaman pada pihak lain.

Istilah kredit lebih banyak digunakan oleh masyarakat pada transaksi perbankan dan pembelian yang tidak dibayar secara tunai. Secara esensial, antara hutang dan kredit tidak jauh beda dalam pemaknaannya di masyarakat. Kredit adalah suatu pembayaran yang dibayar secara berangsur sesuai dengan kesepakatan yang telah disetujui. Pemberi hutang menerima pembayaran beberapa waktu kemudian atau pada saat itu juga setelah barang diserahkan. Oleh karena itu, sisa hutang kredit berarti sisa pinjaman yang tidak dibayar secara tunai oleh suatu badan usaha/perorangan kepada pihak lain yang telah memberikan pinjaman.

C. Pembahasan

1. Persamaan beda linier orde satu homogen

Persamaan beda linear orde satu homogen dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$ax_t + bx_{t-1} = 0 \tag{1}$$

Di mana a dan b adalah konstanta. Dari persamaan (1) dapat ditentukan x_t , yaitu :

$$ax_t + bx_{t-1} = 0$$
$$ax_t = -bx_{t-1}$$
$$x_t = \left(\frac{-b}{a}\right)x_{t-1}$$
$$x_t = \alpha x_{t-1} \tag{2}$$

dengan $= \frac{-b}{a}$. berdasarkan pers (2) diperoleh :

$$x_{t-1} = \alpha x_{t-2} \tag{3}$$
$$x_{t-2} = \alpha x_{t-3} \tag{4}$$

Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (2), sehingga :

$$x_t = \alpha x_{t-1}$$
$$x_t = \alpha(\alpha x_{t-2})$$
$$x_t = \alpha^2 x_{t-2} \ (5)$$

Kemudian substitusikan persamaan (4) ke persamaan (5), sehingga :

$$x_t = \alpha^2 x_{t-2}$$
$$x_t = \alpha^2(\alpha x_{t-3})$$
$$x_t = \alpha^3 x_{t-3}$$
$$\vdots$$
$$x_t = \alpha^t (x_0) \tag{6}$$

Solusi umum dari persamaan (6) adalah sbb :

$$x_t = C\left(-\frac{b}{a}\right)^t \tag{7}$$

dengan $C = x_0$ dan $\left(-\frac{b}{a}\right)^t = \alpha^t$.

2. Persamaan beda linier orde satu non homogen

Bentuk persamaan beda linier orde satu non homogen adalah sbb :

$$ax_t + bx_{t-1} = c_t \tag{8}$$

Persamaan ini disebut non homogen karena c_t memiliki nilai atau tidak sama dengan nol. Jika $c_t = c$ maka persamaan ini disebut persamaan beda linier orde satu non homogen dengan koefisien konstan dengan bentuk persamaan seperti berikut :

$$ax_t + bx_{t-1} = c \tag{9}$$

3. Model sisa hutang dengan bunga tunggal

Pinjaman dengan jenis bunga tunggal, bunga diperoleh dari nilai awal pokok hutang dan bunganya tetap sama sepanjang waktu pinjaman. Dengan demikian, jika tingkat bunga tahunan sebesar *r%* dari nilai pokok hutang, maka bunga pinjaman adalah

$$Bunga = \frac{r}{100} x \; Nilai \; Pokok \; Hutang$$

Atau dinyatakan dengan :

$$I = \frac{r}{100} x \; P_0$$

Oleh karena itu :

$$\begin{pmatrix} Jumlah \\ Pembayaran \\ Setelah \\ 1 \; Tahun \\ Pertama \end{pmatrix} = (Pokok \; Hutang) + \frac{r}{100} \; Pokok \; Hutang$$

Misalkan P adalah pembayaran hutang kredit.

$$P_1 = P_0 + \frac{r}{100} P_0 \quad (10)$$

$$P_2 = P_1 + \frac{r}{100} P_0 \quad (11)$$

$$P_3 = P_2 + \frac{r}{100} P_0 \quad (12)$$

Substitusikan persamaan (10) ke persamaan (11), sehingga :

$$P_2 = P_1 + \frac{r}{100} P_0$$

$$P_2 = \left(P_0 + \frac{r}{100} P_0\right) + \frac{r}{100} P_0$$

$$P_2 = P_0 + \frac{2r}{100} P_0 \quad (13)$$

Kemudian substitusikan kembali persamaan (13) ke persamaan (12), sehingga

$$P_3 = P_2 + \frac{r}{100} P_0$$

$$P_3 = \left(P_0 + \frac{2r}{100} P_0\right) + \frac{r}{100} P_0$$

$$P_3 = P_0 + \frac{3r}{100} P_0$$

$$\vdots$$

$$P_n = P_0 + \frac{nr}{100} P_0 \quad (14)$$

Dengan n = 0,1,2,⋯, n yang akan tumbuh selama n periode. Sehingga persamaan (14) menyatakan persamaan beda linear orde satu. Persamaan tersebut merupakan jumlah dari P_n yang mana jumlah nilai pokok P_0 akan tumbuh ketika mendapatkan bunga tunggal untuk n tahun pada tingkat bunga tahunan sebesar r%.

Perhitungan sisa hutang dengan bunga tunggal menggunakan persamaan beda linear orde satu yaitu pokok hutang dikalikan dengan bunga tunggal lalu dikurangi dengan anuitas nya (serangkaian pembayaran). Sehingga membentuk model sbb :

$$S_{n+1} = P_{n+1} - A$$
$$S_{n+1} = P_0 + \frac{nr}{100} P_0 - A \qquad (15)$$

Dimana :

S_{n+1} = Sisa hutang setelah pembayaran *n+1*
P_0 = Nilai awal pokok hutang
$\frac{nr}{100}$ = Bunga ke *n* tahun
A = Anuitas

4. Model sisa hutang dengan bunga majemuk

Bunga majemuk biasanya digunakan untuk pinjaman dengan periode yang lama. Bunga ditambahkan ke nilai pokok secara berkala setiap periodenya dan nilai pokok yang baru digunakan untuk menghitung nilai pokok periode berikutnya.

Misalkan :

$$P_1 = P_0 + \frac{r}{100} P_0 \qquad (16)$$

$$P_2 = P_1 + \frac{r}{100} P_1 \qquad (17)$$

$$P_3 = P_2 + \frac{r}{100} P_2 \qquad (18)$$

Substitusikan persamaan (16) ke persamaan (17), sehingga :

$$P_2 = P_1 + \frac{r}{100} P_1$$

$$P_2 = P_1 + \frac{r}{100}\left(P_0 + \frac{r}{100} P_0\right)$$

$$P_2 = P_1 + \frac{r}{100} P_0 + \left(\frac{r}{100}\right)^2 P_0 \qquad (19)$$

Substitusikan persamaan (19) ke persamaan (18), sehingga :

$$P_3 = P_2 + \frac{r}{100} P_2$$

$$P_3 = P_2 + \frac{r}{100}\left(P_1 + \frac{r}{100} P_0 + \left(\frac{r}{100}\right)^2 P_0\right)$$

$$P_3 = P_2 + \frac{r}{100} P_1 + \left(\frac{r}{100}\right)^2 P_0 + \left(\frac{r}{100}\right)^3 P_0 \qquad (20)$$

Substitusikan persamaan (16) ke persamaan (20), sehingga :

$$P_3 = P_2 + \frac{r}{100}\left(P_0 + \frac{r}{100} P_0\right) + \left(\frac{r}{100}\right)^2 P_0 + \left(\frac{r}{100}\right)^3 P_0$$

$$P_3 = P_2 + \frac{r}{100} P_0 + \left(\frac{r}{100}\right)^2 P_0 + \left(\frac{r}{100}\right)^2 P_0 + \left(\frac{r}{100}\right)^3 P_0$$

$$P_3 = P_2 + P_0\left(\frac{r}{100} + \left(\frac{r}{100}\right)^2 + \left(\frac{r}{100}\right)^2 + \left(\frac{r}{100}\right)^3\right)$$

$$P_3 = P_2 + P_0\left(\frac{r}{100} + \left(\frac{2r}{100}\right)^2 + \left(\frac{r}{100}\right)^3\right)$$

$$P_3 = P_2 + P_0 \frac{r}{100}\left(1 + \frac{2r}{100} - \frac{r}{100}\right)^2$$

$$P_3 = P_2 + P_0 \frac{r}{100}\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

$$P_3 = P_2 + \left(\frac{2r}{100}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$P_{n+1} = P_n + \left(\frac{nr}{100}\right)^n P_0 \tag{21}$$

Nilai P_n dimasukan kedalam nilai pokok P_0 yang mana akan tumbuh ketika mendapatkan bunga majemuk untuk *n* periode, periode n dalam setahun tingkat bunganya adalah *r%*.

Bunga yang diperoleh setiap periode adalah *nr%* dari jumlah nilai pokok pada awal periode, yaitu :

$$Bunga = \left(\frac{nr}{100}\right)^n \times \begin{pmatrix} Jumlah\ Pembayaran\ pada \\ Awal\ Periode \end{pmatrix}$$

Atau dapat dinyatakan dengan :

$$I = \left(\frac{nr}{100}\right)^n P_0 \tag{22}$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{pmatrix} Jumlah \\ Pembayaran \\ Setelah \\ 1\ tahun \\ pertama \end{pmatrix} = (Pokok\ Hutang) + \left(\frac{nr}{100}\right)^n \times (Pokok\ Hutang) \tag{23}$$

Untuk menyatakan bahwa persamaan tersebut adalah persamaan beda linear, misalkan P_n merupakan pembayaran hutang setelah *n* periode.

Perhitungan sisa hutang dengan bunga majemuk menggunakan persamaan beda linear orde satu yaitu pokok hutang dikalikan dengan bunga majemuk lalu dikurangi dengan anuitas nya (serangkaian pembayaran). Sehingga membentuk model sbb :

$$S_{n+1} = P_{n+1} - A$$

$$S_{n+1} = P_n + \left(\frac{nr}{100}\right)^n P_0 - A \tag{24}$$

Dimana :

S_{n+1} = Sisa hutang setelah pembayaran *n+1*
P_n = Nilai pokok hutang ke *n*
P_0 = Nilai awal pokok hutang
$\frac{nr}{100}$ = Bunga ke *n* tahun
A = Anuitas

D. Kesimpulan

Penggunaan persamaan beda linear untuk menghitung sisa hutang mempermudah perhitungan. Terlihat dari perhitungan bunga tunggal dan bunga majemuk terdapat perbedaan dalam serangkaian pembayaran dan jumlah semua hutang yang harus dibayarkan. Apabila menggunakan bunga tunggal jumlah hutang lebih kecil dibandingkan dengan menggunakan bunga majemuk.

Perhitungan sisa hutang tersebut dapat dikatakan bahwa, jika bank menghitung sisa hutang menggunakan bunga majemuk maka hal tersebut akan menguntungkan pihak bank, dan jika bank menghitung sisa hutang menggunakan bunga tunggal maka hal tersebut akan menguntungkan pihak nasabah, karena sisa hutang yang diperoleh lebih kecil daripada sisa hutang menggunakan bunga majemuk.

Daftar Pustaka

Fulford, G., Forrester, P., Jones, A. 1997. *Modelling with Differential and Difference Equation*. Cambridge. University Press.

Geri Achmadi, Dwi Gustanti, Dani Wildan Hakim. 2008. Mahir Matematika 3. Jakarta. Pusat Perbukuan.

Kalangi, J.B. 2015. Matematika Ekonomi dan Bisnis. Jakarta. Salemba Empat

Kasmir, Dr. 2012. *Manajemen Perbankan.* Jakarta. PT Raja Grafindo Persada.

Rachmat Firdaus, Maya Ariyanti. 2011. *Manajemen Perkreditan Bank Umum.* Bandung. Alfabeta.

Waluya, S.B. 2006. Persamaan Diferensial. Yogyakarta. GrahaIlmu.

UNIVERSITAS ISLAM BANDUNG