

Model Matematika Konsentrasi Zat Pada Reaktor Alir n Tangki Berpengaduk yang Disusun Seri

Mathematical Model of Concentration of The Substance In n CSTR Compiled Series

¹Putri Salehah, ²Gani Gunawan ³Respitawulan

^{1,2,3}Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung,
Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

email: ¹salehahputri@gmail.com, ²ggani9905@gmail.com, ³respitawulan@gmail.com

Abstract. In the process of waste adsorption especially for industrial sector, results of industrial sewage treatment is done using the single Continuous Stirred Tank Reactor (CSTR) which the process requires a lot of reactor volume and a long reaction time. However, the observations of the Budi Aman (2007) and Riadi (2012) States that if arranged in series over a multilevel CSTR turned out to require a lower volume of reactor and reaction time is shorter compared to the use of single CSTR. The concentration on flow reactors for n CSTR is modelled to show the reaction time needed for various number of tank reactor. The model is the first order non homogeneous ordinary differential equation which represents the concentration of the substance in the tank. The simulation using various number of reactor tank shows the reaction time needed is decreasing as the number of tank reactor added.

Keywords: Model, The Concentration Of The Substance, The Tank, Stirred, CSTR.

Abstrak. Dalam proses adsorpsi limbah utamanya pada sektor industri, pengolahan limbah hasil industri dilakukan menggunakan tangki alir berpengaduk tunggal dimana prosesnya membutuhkan volume reaktor yang banyak dan waktu reaksi yang lama. Namun, hasil pengamatan dari Budi Aman (2007) dan Riadi (2012) menyatakan bahwa jika disusun secara seri lebih dari satu tangki alir berpengaduk (bertingkat) ternyata memerlukan volume reaktor yang lebih rendah dan waktu reaksi yang lebih singkat dibandingkan penggunaan tangki alir berpengaduk tunggal. Dalam skripsi ini, akan dimodelkan satu rumusan matematika yaitu konsentrasi pada reaktor alir untuk n buah tangki yang berpengaduk untuk menunjukkan suatu kebenaran dari kondisi menurut Budi Aman (2007) dan Riadi (2012) bahwa waktu reaksi yang dibutuhkan akan lebih rendah bila menggunakan tangki alir berpengaduk bertingkat. Model matematika dari proses adsorpsi pengolahan limbah adalah persamaan diferensial biasa orde satu non homogen yang merepresentasikan konsentrasi zat dalam tangki. Dalam skripsi ini, diberikan pula simulasi penggunaan jumlah tangki reaktor yang berbeda-beda sehingga terlihat bahwa semakin banyak tangki yang digunakan maka waktu reaksi yang dibutuhkan semakin sedikit.

Kata Kunci: Model, Konsentrasi Zat, Tangki, Berpengaduk, CSTR.

A. Pendahuluan

Salah satu penyebab terjadinya pencemaran lingkungan baik di air, udara, maupun tanah adalah zat-zat yang berasal dari hasil sisa produksi dalam industri yang berbahaya atau biasa dikenal limbah industri. Apabila limbah industri tidak dilakukan penanganan yang tepat sebelum dilakukan proses pembuangan maka lingkungan akan tercemar. Salah satu upaya yang dilakukan untuk menangani hal tersebut adalah melakukan teknik adsorpsi limbah dimana zat atau senyawa dalam limbah diserap dengan zat penyerap atau adsorpen yang ramah lingkungan sehingga konsentrasi zat atau senyawa limbah mengalami penurunan kadar karena telah diserap ke dalam adsorpen. Teknik adsorpsi limbah biasanya dilakukan dalam sebuah alat yang dinamakan tangki reaktor berjenis Reaktor Alir Tangki Berpengaduk (RATB) atau *Continous Stirred Tank Reactor* (CSTR). Selama ini, proses untuk menurunkan konsentrasi zat limbah selalu digunakan tangki alir berpengaduk tunggal.

Menurut Budiawan (2007) dan Hwa Riadi (2012), tangki alir berpengaduk bertingkat dua atau lebih memiliki keuntungan yang tidak dimiliki tangki alir berpengaduk tunggal, yaitu volume reaktor dan waktu reaksi yang dibutuhkan tangki alir berpengaduk bertingkat akan lebih kecil dibandingkan penggunaan tangki alir berpengaduk tunggal.

Berdasarkan kondisi tersebut, dibutuhkan adanya suatu pembuktian melalui sebuah model matematika apakah benar tangki alir berpengaduk bertingkat yang disusun seri lebih menguntungkan dibandingkan tangki alir berpengaduk tunggal, bila ditinjau dari efisiensi waktu reaksi. Dalam hal ini, pembuktian dilakukan melalui sebuah model penentuan konsentrasi zat yang keluar dari tangki alir berpengaduk dimana konsentrasi tersebut akan merepresentasikan lamanya waktu reaksi berlangsung.

Oleh karena itu, sesuai dengan latar belakang yang telah dipaparkan maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana membentuk model matematika penentuan konsentrasi pada tangki alir berpengaduk yang disusun seri sebanyak n tangki dan bagaimana hasil perhitungan dari model penentuan konsentrasi tangki alir berpengaduk bila diterapkan pada satu tangki alir berpengaduk (tunggal) dan tangki alir berpengaduk bertingkat. Selanjutnya, tujuan dari penulisan karya ilmiah ini adalah membentuk model matematika penentuan konsentrasi pada tangki alir berpengaduk yang disusun seri sebanyak n tangki dan menentukan hasil perhitungan konsentrasi dari reaksi zat yang dilakukan pada satu tangki alir berpengaduk (tunggal) dengan tangki alir berpengaduk bertingkat melalui model matematika tersebut.

B. Landasan Teori

Neraca Massa Komponen

Menurut Neswan (2009), sebuah senyawa kimia dituangkan dengan laju tertentu ke dalam tangki yang berisi zat pelarut atau umpan, keduanya dianggap tercampur sempurna. Pada saat yang sama campuran tersebut juga dikeluarkan dari tangki dengan laju tertentu pula. Persamaan diferensial untuk masalah ini didasarkan pada formula dibawah ini:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Laju perubahan} \\ \text{jumlah senyawa} \\ \text{dalam tangki} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{massa yang} \\ \text{masuk ke} \\ \text{tangki} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{massa yang} \\ \text{keluar dari} \\ \text{tangki} \end{array} \right]$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{d(C(t)V)}{dt} = C_{in}(t) \cdot Q_{in} - C_{out}(t) \cdot Q_{out}$$

Keterangan:

$C(t)$: konsentrasi zat pada tangki

$C_{in}(t)$: konsentrasi zat yang masuk pada tangki

$C_{out}(t)$: konsentrasi zat yang keluar dari tangki

V : Volume tangki

Q_{in} : laju alir masuk tangki

Q_{out} : laju alir keluar tangki

Metode Faktor Integral

Faktor integral digunakan sebagai teknik untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde satu yang memiliki bentuk umum, sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$$

Solusi dari persamaan diferensial tersebut akan diperoleh dengan cara mengkalikan faktor integral ke dalamnya yaitu $e^{\int P(t)dt}$ sehingga solusi persamaan yang diperoleh akan memenuhi bentuk dibawah ini:

$$y(t) = e^{-\int P(t)dt} \int e^{\int P(t)dt} Q(t)dt$$

Metode Persamaan Diferensial Variabel Terpisah

Menurut Rochmad (2002), metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaandiferensial orde satu yang memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = p(x) \cdot q(y)$$

Untuk mencari solusi persamaan diferensial (1) dapat dilakukan dengan cara mengintegalkan kedua ruas (terhadap variabel yang sama yakni x). Lalu dimisalkan $u = y(x)$ dan $du = y'(x)dx$ maka dengan mengintegalkan kedua ruas persamaan menghasilkan solusi

$$\int \frac{du}{q(u)} = \int p(x)dx + C, C \text{ konstan sebarang.}$$

Selanjutnya substitusikan kembali $u = y(x)$, maka diperoleh solusi umum.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Dalam tahap ini, akan dibentuk sebuah model matematika dari tangki CSTR yang dapat merepresentasikan konsentrasi zat yang keluar dari tangki CSTR bila tangki sebanyak n .

Model Matematis Konsentrasi Dua Tangki Alir Berpengaduk yang Disusun Seri

Pada model ini akan ditunjukkan sebuah persamaan yang dapat digunakan untuk mencari konsentrasi zat yang keluar dari dua tangki CSTR yang disusun secara seri dan dipasang secara alir atau kontinyu, model ini memenuhi persamaan diferensial yang dikemukakan (Dawkins, 2007).

Neraca massa komponen untuk satu tangki CSTR:

$$\frac{dC_1 \cdot V}{dt} = Q \cdot C_0 - Q \cdot C_1 \quad (2)$$

Dari persamaan (2) diperoleh persamaan konsentrasi satu tangki CSTR

$$C_1 = C_0 e^{-\frac{1}{T}t}$$

Neraca massa komponen untuk dua tangki CSTR:

$$\frac{dC_2.V}{dt} = Q \cdot C_1 - Q \cdot C_2 \quad (3)$$

Dari persamaan (3) diperoleh persamaan konsentrasi dua tangki CSTR

$$C_2 = \frac{C_0 t e^{-\frac{t}{T}}}{T} \quad (4)$$

Model Matematis Konsentrasi Tiga Tangki Alir Berpengaduk yang Disusun Seri

Pada model ini akan ditunjukkan sebuah persamaan yang dapat digunakan untuk mencari konsentrasi zat yang keluar dari tiga tangki alir berpengaduk yang disusun secara seri dimana persamaan (4) disubstitusikan pada neraca massa dibawah ini.

Neraca massa komponen untuk tiga tangki CSTR:

$$\frac{dC_3.V}{dt} = Q \cdot C_2 - Q \cdot C_3 \quad (5)$$

Dari persamaan (5) diperoleh persamaan konsentrasi tiga tangki CSTR

$$C_3 = \frac{C_0 t^2 e^{-\frac{t}{T}}}{2T^2} \quad (6)$$

Model Matematis Konsentrasi n Tangki Alir Berpengaduk yang Disusun Seri

Dalam membentuk model penentuan konsentrasi zat yang keluar pada tangki ke- n dapat dilakukan melalui pendekatan induksi matematika dimana sebelumnya sudah diamati bagaimana membentuk model penentuan konsentrasi pada satu, dua, dan tiga tangki alir berpengaduk yang disusun seri. Melalui metode ini akan ditunjukkan suatu kondisi dimana konsentrasi zat A untuk tangki ke- n akan memenuhi persamaan

$$C_n = \frac{C_0 t^{n-1} e^{-\frac{t}{T}}}{(n-1)! T^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

Melalui induksi matematika, persamaan (7) dapat dibuktikan kebenarannya dimana pembuktiannya dilakukan hingga pada tahap konklusi atau saat $n = k + 1$ akan dibuktikan benar, diperoleh bentuk

$$C_{k+1} = \frac{C_0 t^k e^{-\frac{t}{T}}}{k(k-1)! T^k} \quad (8)$$

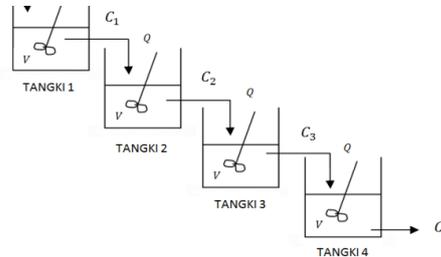
Dengan demikian, pernyataan pada persamaan (7) terbukti valid dan diperoleh model matematika yang dapat digunakan untuk menghitung konsentrasi zat yang keluar dari tangki ke- n .

Studi Kasus

Perhatikan suatu zat senyawa organik limbah fenol sebanyak 300 ppm atau mg/L yang dimasukkan ke dalam tangki alir berpengaduk ke-1 yang telah berisi 4000 liter larutan penyerap limbah (NaCl dan arang kayu gelam) atau volume total di dalam tangki dengan debit alir tangki alir berpengaduk sebesar 10 liter/menit konstan. Dalam tangki alir berpengaduk ke-1, ke-2, ke-3, dan ke-4 terjadi proses perubahan massa komponen senyawa fenol melalui teknik adsorpsi dimana konsentrasi limbah fenol diserap oleh larutan penyerap limbah. Pada tahap ini, akan dilakukan perhitungan konsentrasi yang keluar dari tangki alir berpengaduk bertingkat maupun tunggal berdasarkan model yang telah dibuat.

Namun, terlebih dahulu akan dilakukan perhitungan terhadap tangki alir berpengaduk bertingkat yaitu empat tangki, lalu tiga tangki, selanjutnya dua tangki, dan terakhir bila digunakan satu tangki alir berpengaduk (tunggal) untuk melihat

perbedaan waktu reaksi dari masing-masing tangki. Bila ambang batas kadar fenol dikatakan aman bagi lingkungan berkisar antara 0,5-1,0mg/L berdasarkan KEP No. 51/MENLH/10/1995, maka besar penurunan konsentrasi limbah yang diinginkan sebesar 99.66% artinya apabila konsentrasi fenol 1,02 ppm (mg/L) maka perhitungan konsentrasi berakhir.



Gambar 1. Empat Tangki Alir Berpengaduk yang Disusun Seri

Model yang Terbentuk

Melalui persamaan (7), diperoleh model matematis konsentrasi untuk masing-masing tangki alir berpengaduk yang disusun seri yang digunakan adsorpsi limbah, yaitu:

a. Satu Tangki

$$C_1 = C_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

b. Dua Tangki

$$C_2 = \frac{C_0 t e^{-\frac{t}{T}}}{T}$$

c. Tiga Tangki

$$C_3 = \frac{C_0 t^2 e^{-\frac{t}{T}}}{2T^2}$$

d. Empat Tangki

$$C_4 = \frac{C_0 t^3 e^{-\frac{t}{T}}}{6T^3}$$

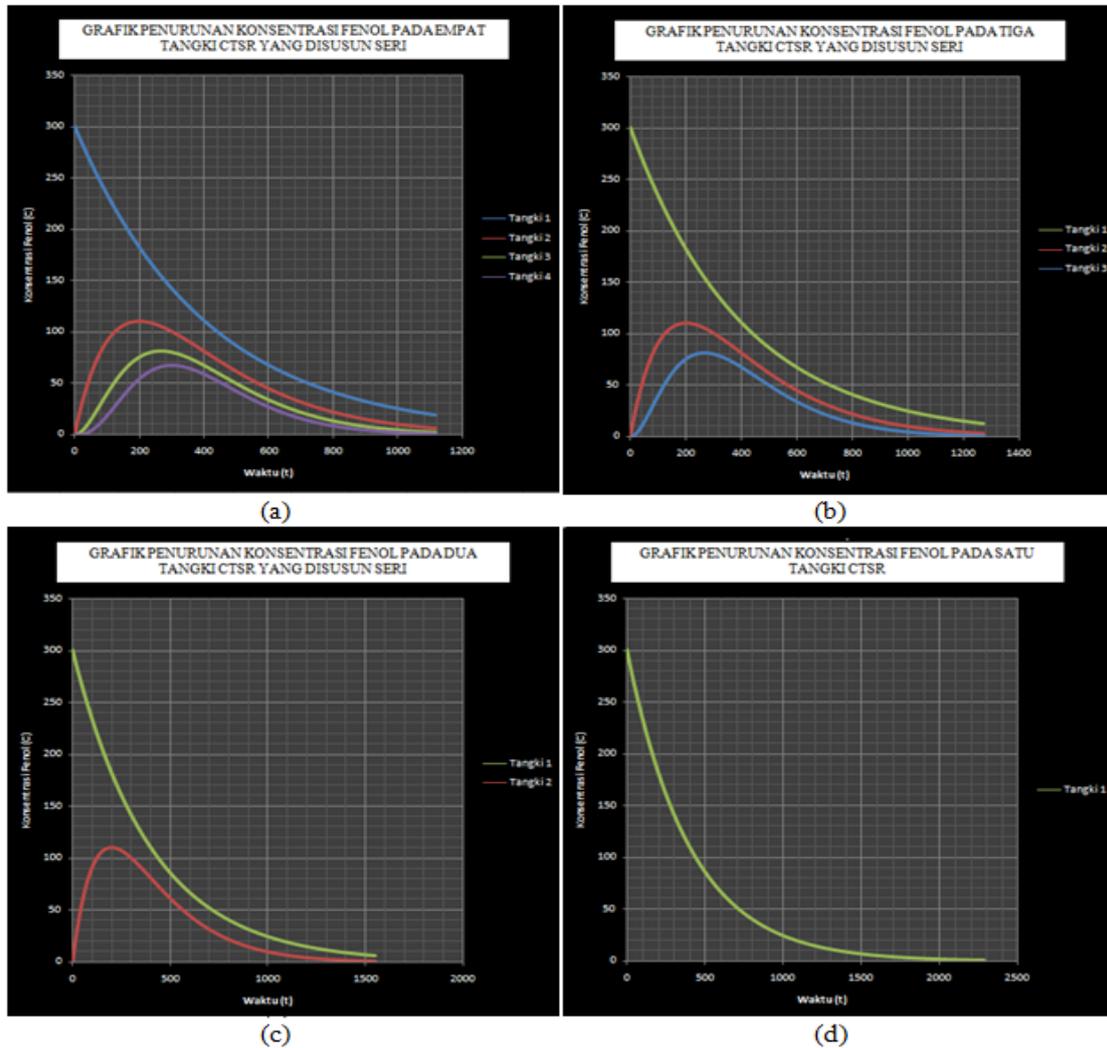
Melalui data perhitungan konsentrasi pada empat tangki alir berpengaduk yaitu debit alir (Q), konsentrasi awal (C_0), dan Volume tangki (V) yang disubstitusikan ke dalam persamaan-persamaan diatas, maka dapat dibandingkan hasil reaksi yang diperoleh bila proses adsorpsi limbah dilakukan pada satu, dua, bahkan tiga tangki alir berpengaduk. Berikut perhitungan hasil reaksi pada masing-masing tangki.

Tabel 1. Tabel Perhitungan Hasil Reaksi Zat Pada Setiap Tangki

| n (banyaknya tangki) | T (menit) | Konsentrasi Akhir Fenol (ppm) |
|------------------------|-------------|-------------------------------|
| 1 | 2281 | 17,9265432 |
| 2 | 1550 | 17,91066422 |
| 3 | 1268 | 17,9599555 |
| 4 | 1114 | 17,66199019 |

Sumber : Data penelitian yang sudah diolah, 2016.

Adapun grafik konsentrasi zat terhadap waktu dari masing-masing tangki dapat direpresentasikan ke dalam bentuk berikut:



Gambar 2. Grafik Konsentrasi Zat Terhadap Waktu pada Masing-Masing Penggunaan Tangki. (a) Satu Tangki, (b) Dua Tangki, (c) Tiga Tangki, dan (d) 4 Tangki.

D. Kesimpulan

Terbentuknya model penentuan konsentrasi pada tangki CSTR yang disusun seri sebanyak n tangki, yaitu:

$$C_n = \frac{C_0 t^{n-1} e^{-\frac{t}{T}}}{(n-1)! T^{n-1}}, \quad T = \frac{V_T}{Q}, \quad v = \frac{V_T}{n}$$

Berdasarkan model matematika yang telah terbentuk, dengan konsentrasi awal zat (C_0) 300 ppm, debit alir tangki (Q) 10 liter/menit, dan volume tangki (V) 4000 liter yang disubstitusikan ke dalam model tersebut maka diperoleh nilai konsentrasi akhir zat yang menurun sebanyak 99,66% dari konsentrasi awal, dengan nilai waktu reaksi yang berbeda-beda dari tangki ke satu, dua, tiga, dan empat secara berturut-turut yaitu 2281 menit, 1550 menit, 1268 menit, dan 1114 menit. Bila dibandingkan antara keempat tangki tersebut, dapat disimpulkan bahwa semakin banyak tangki alir berpengaduk yang digunakan dalam melakukan proses pencampuran suatu zat maka semakin sedikit waktu reaksi yang dibutuhkan.

E. Saran

Model matematika yang telah dibuat dapat membuktikan kebenaran pernyataan bahwa tangki alir berpengaduk bertingkat yang disusun seri lebih baik daripada tangki alir berpengaduk tunggal, bila dilihat dari aspek efisiensi waktu reaksi, namun pada kenyataannya perlu dipertimbangkan aspek ekonominya dikarenakan biaya pemasangan reaktor alir tangki berpengaduk membutuhkan biaya yang tidak sedikit atau relatif mahal. Selain itu, model dapat dikembangkan untuk penentuan konsentrasi zat, bila zat yang bereaksi dalam tangki alir berpengaduk lebih dari satu.

Daftar Pustaka

- Dawkins, P. 2007. *Differential Equation (Math 3301)*. Texas : Lamar University.
- Rochmad. 2002. *Bahan Ajar Persamaan Diferensial*. Semarang: FMIPA UNNES.
- Neswan. O. 2009. *Catatan Kuliah MA1223 Kalkulus Elementer II*. Bandung: Departemen Matematika ITB.
- Lie Hwa dan Lieke Riadi. 2012. *Simulasi Pengolahan Limbah Cair Berwarna dengan Foto Fenton Pada Sistem Kontinyu*. Jurnal Teknik Kimia Indonesia, Vol. 11:80.
- I. Gusti S. Budiawan. 2007. *Modul Perancangan Reaktor*. Yogyakarta: Teknik Kimia (FTI) UPN Veteran Yogyakarta.