

## Solusi Numerik Distribusi Tekanan dengan Persamaan Difusi Dua Dimensi pada Reservoir Panas Bumi Fasa Air Menggunakan Skema Crank-Nicholson

Numerical Solution for Pressure Distribution a with Two Dimensional Diffusions  
Equations on Water Phase Geothermal Reservoir using Crank-Nicholson Scheme

<sup>1</sup>Mufarrih Ridhwan, <sup>2</sup>Icih Sukarsih, <sup>3</sup>Respitawulan

<sup>1,2,3</sup>Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung,  
Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

email: <sup>1</sup>rid.onemymail@gmail.com, <sup>3</sup>sukarsih@unisba.ac.id, <sup>3</sup>respitawulan@gmail.com

**Abstract.** This research is aimed to create a model for pressure equation finite difference Crank-Nicholson scheme of distribution of pressure with two-dimensional diffusions equation in the geothermal reservoir water phase. Previous research conducted by Singarimbun (2012) simulates geothermal reservoir on the production process and fluid injection on water phase. The model in this study is developed by transforming from Cartesian coordinates to cylindrical polar coordinates, as the formation of pressure is in unsteady-state condition the pressure is affected by time. Thus, the diffusions model then applied Crank-Nicholson scheme and simplified by means of the finite difference discretization equation. Pressure distribution with a numerical solution of two-dimensional diffusion equation formed from the Crank-Nicholson scheme.

**Keywords:** mass balance equations, pressure distribution, coordinate cylindrical symmetry, the finite difference method, numerical solutions.

**Abstrak.** Penelitian dalam skripsi ini bertujuan untuk membuat model persamaan beda hingga skema Crank-Nicholson dari distribusi tekanan dengan persamaan difusi dua dimensi pada reservoir panas bumi fasa air. Penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Singarimbun (2012) mensimulasikan reservoir pada proses produksi dan injeksi fluida ke reservoir panas bumi fasa air. Model yang dipakai dalam penelitian ini adalah distribusi tekanan yang ditransformasi dari koordinat kartesius ke koordinat silinder polar, sebagai formasi tekanan pada kondisi *unsteady-state* (tidak tunak) dimana tekanan dipengaruhi oleh waktu. Kemudian diterapkan metode beda hingga skema Crank-Nicholson dan disederhanakan dengan cara *diskritisasi* persamaan beda hingga. Solusi numerik distribusi tekanan dengan persamaan difusi dua dimensi terbentuk dari skema Crank-Nicholson.

**Kata Kunci:** persamaan kesetimbangan massa, distribusi tekanan, koordinat silinder simetri, metode beda hingga, solusi numerik.

## A. Pendahuluan

Sistem panas bumi di Indonesia umumnya merupakan sistem *hydrothermal* yang mempunyai temperatur tinggi ( $>225^{\circ}\text{C}$ ), hanya beberapa diantaranya yang mempunyai temperatur sedang ( $150\text{-}225^{\circ}\text{C}$ ). Oleh sebab itulah, potensi tersebut perlu dikembangkan guna pemanfaatan panas bumi untuk berbagai keperluan, yang paling dominan adalah untuk pembangkit listrik tenaga panas bumi.

Terjadinya sumber energi panas bumi di Indonesia serta karakteristiknya dijelaskan oleh (Budihardi, 1998, dalam Saptadji, 2009) sebagai berikut. Ada tiga lempengan yang berinteraksi di Indonesia, yaitu lempeng Pasifik, lempeng India-Australia dan lempeng Eurasia. Tumbukan yang terjadi antara ketiga *lempeng tektonik* tersebut telah memberikan peranan yang sangat penting bagi terbentuknya sumber energi panas bumi di Indonesia.

Reservoir yang digunakan dalam penelitian ini adalah fasa air atau sistem dominasi air. Sistem dominasi air merupakan sistem panas bumi yang umum terdapat di dunia dimana *reservoir*-nya mempunyai kandungan air yang sangat dominan walaupun “*boiling*” sering terjadi pada bagian atas *reservoir* membentuk lapisan penutup uap yang mempunyai temperatur dan tekanan tinggi.

Dalam pemodelan *reservoir* panas bumi ada banyak variabel dan formulasi untuk dihitung. Formulasi dan variabel ini dihitung dengan pendekatan matematika berdasarkan pemodelan fisik. Digunakan beberapa formulasi dan variabel yang berhubungan dengan aliran fluida dalam media berpori (*porous medium*). Beberapa formulasi dan variabel yang terkait dari hal tersebut adalah Hukum Darcy yang menjelaskan mengenai kesetimbangan massa dan kesetimbangan panas.

Dalam pengaplikasiannya Hukum Darcy dapat menyederhanakan persamaan momentum kesetimbangan massa dan panas, Ada beberapa simulasi secara numerik yang dapat dijadikan studi pengembangan energi panas bumi, sebagai contoh, (Mercer, 1979) mempresentasikan simulasi *reservoir* panas bumi dari cairan dan uap yang didominasi. Simulasi diambil dari modifikasi model persamaan diferensial parabolik orde dua oleh (Gutierrez-Miravete, 2010) untuk model persamaan difusi dua dimensi, yaitu dengan bentuk formasi aliran radial ke koordinat silinder simetri.

Karenanya perlu dibuat model persamaan difusi untuk distribusi tekanan dan diselidiki dengan solusi numeriknya, dalam hal ini digunakan metode beda hingga Skema Crank-Nicholson.

## B. Landasan Teori

Menurut hukum konservatif kesetimbangan massa bahwa materi tidak dapat diciptakan atau dihilangkan, tetapi hanya berubah bentuk dari satu wujud ke wujud lainnya. Dengan persamaan Massa (Input) = Massa (Output) + Akumulasi. Kesetimbangan massa dapat dievaluasi secara total, artinya membuat persamaan matematika dengan menghitung seperti tahapan proses pengolahan yang dilaluinya. Aliran Transient atau *unsteady-state* adalah suatu aliran tak tunak yang terjadi pada sebagian besar aliran fluida. Untuk menyederhanakan dalam perhitungan dapat dianggap suatu aliran dalam keadaan tunak. Suatu aliran *unsteady-state* memerlukan waktu untuk mencapai / mendekati keadaan tunak. Dua konsep inilah yang digunakan dalam membentuk model persamaan difusi dua dimensi untuk distribusi tekanan. Sebagai dasar dari pemodelan ini adalah digunakannya hukum Darcy untuk fasa air dengan bentuk persamaan sebagai berikut:

$$v = \frac{q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

$v$  adalah kecepatan semu dalam sentimeter per detik dan sama dengan  $q/A$ , dimana  $q$  adalah laju aliran volumetrik dalam sentimeter kubik per detik dan  $A$  adalah luas penampang total batuan dalam sentimeter persegi. Dengan kata lain,  $A$  meliputi wilayah dari bahan batuan serta daerah saluran pori. Viskositas fluida  $\mu$ , dinyatakan dalam centipoise unit, dan gradien tekanan,  $dp/dx$ , dalam satuan atmosfer per sentimeter, diambil dalam arah yang sama dengan  $v$  dan  $q$ . Proporsionalitas konstan  $k$ , adalah permeabilitas batuan dinyatakan dalam satuan Darcy.

Untuk sistem horizontal-radial, gradien tekanan positif (yang diilustrasikan pada **Gambar 1**) dan persamaan Darcy dapat dinyatakan berikut ini dalam bentuk radial umum:

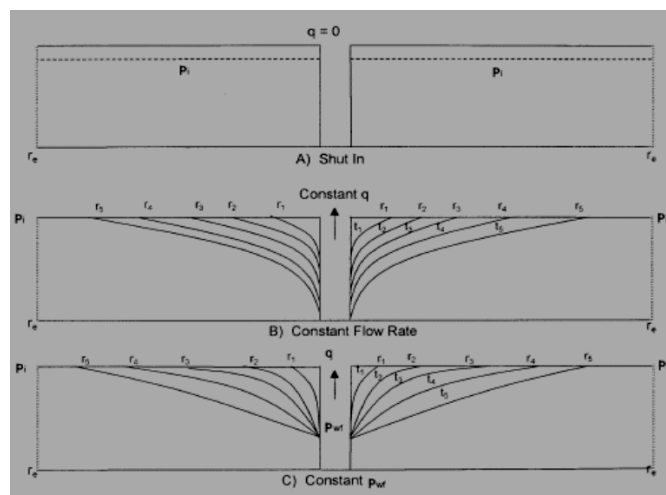
$$v = \frac{q_r}{A_r} = \frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_r \quad (2)$$

Dimana :  $q_r$  adalah laju aliran volumetrik dalam radius  $r$ ,  $A_r$  luas penampang mengalir dalam radius  $r$ ,  $\left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_r$  gradien tekanan dalam radius  $r$ ,  $v$  kecepatan semu dalam radius  $r$ . Daerah penampang pada jari-jari  $r$  pada dasarnya adalah luas permukaan dari silinder. Untuk sepenuhnya ditembus dengan baik dengan ketebalan  $h$ , luas penampang daerah  $A_r = 2\pi r h$ . (Tarek A., 1946).

### C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Berikut ini adalah hasil penelitian yang dilakukan mengenai solusi numerik distribusi tekanan dengan persamaan difusi dua dimensi.

Pembentukan model persamaan kesetimbangan massa pada kondisi *unsteady-state* dideskripsikan bahwa untuk kondisi tersebut tekanan berubah terhadap waktu. Dijelaskan bagian B pada Gambar 2 menunjukkan bahwa pada waktu  $t_1$ , gangguan tekanan telah berubah di jarak,  $r_1$  ke dalam reservoir. Perhatikan bahwa gangguan tekanan radius terus berubah terhadap waktu.

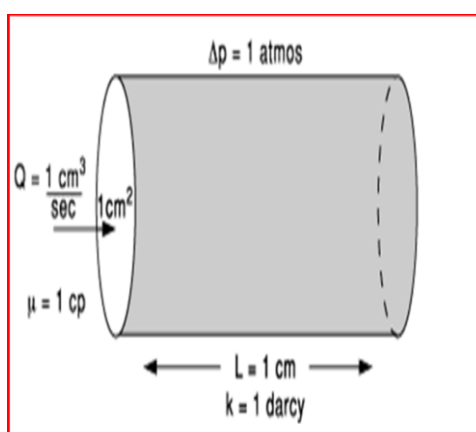
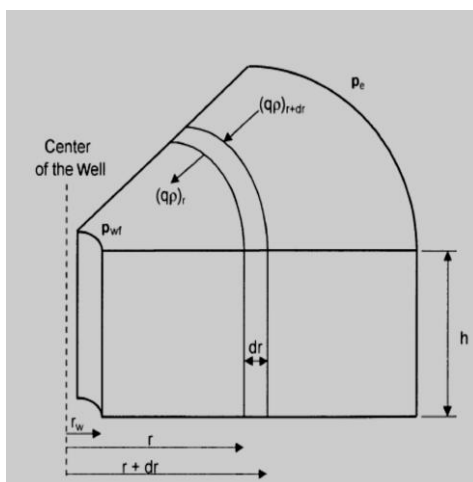


**Gambar 2.** Gangguan tekanan dengan fungsi dari waktu

Variabel-variabel pada aliran *unsteady-state* sebagai tambahan yang sudah digunakan pada aliran *steady-state* adalah ; Waktu ( $t$ ), Porositas ( $\phi$ ), dan Jumlah kompresibilitas ( $c_t$ ). Pada **Gambar 2** bagian B menunjukkan periode aliran transien selama interval waktu  $0 < t < t_t$  yang tetap pada interval waktu  $0 < t < t_4$ .

Menurut konsep persamaan kesetimbangan massa pada kondisi *unsteady-state*, laju aliran massa masuk elemen volume dikurangi laju aliran massa keluar dari elemen selama selang waktu  $\Delta t$  harus sama dengan rata-rata jumlah massa selama interval waktu, atau:

$$\left( \begin{array}{l} \text{massa masuk} \\ \text{elemen volume} \\ \text{selama } \Delta t \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{massa keluar} \\ \text{elemen volume} \\ \text{selama } \Delta t \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{rata - rata} \\ \text{jumlah massa} \\ \text{selama } \Delta t \end{array} \right) \quad (3)$$



Gambar 1: (a) Ilustrasi dari aliran radial (b) Ilustrasi pipa mengenai arah aliran masuk dan aliran keluar

Berdasarkan Gambar 1, massa masuk elemen volume dan massa keluar elemen volume dijabarkan sbb.

Massa masuk elemen volume

$$(M)_{inlet} = 2\pi \Delta t (r + dr) h (v\rho)_{r+dr} \quad (4)$$

Massa keluar elemen volume

$$(M)_{outlet} = 2\pi \Delta t r h (v\rho)_{r+dr} \quad (5)$$

Dengan substitusi persamaan (4) dan persamaan (5) ke persamaan (3) persamaan rata-rata jumlah massa selang waktu  $\Delta t$  yang terbentuk adalah

$$\frac{1}{r} \frac{\partial [r(v\rho)]}{\partial r} = \frac{\partial (\phi\rho)}{\partial t} \quad (6)$$

Dimana :  $\phi$  porositas,  $\rho$  densitas dalam satuan  $lb/ft^3$ , dan  $v$  kecepatan fluida dalam satuan  $ft/day$ . Persamaan (6) merupakan persamaan total massa elemen volume pada sumur injeksi pada aliran radial. Kemudian dihubungkan dengan persamaan Darcy untuk arah radial dengan persamaan sebagai berikut:

$$v = (0.006328) \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \tag{7}$$

Untuk nilai 0,006328 merupakan nilai formasi tekanan untuk fasa air yang diperoleh dari lab PVT.

Berdasarkan aturan persamaan diferensial parsial persamaan (7) disubstitusikan ke persamaan (6) akan membentuk persamaan difusi untuk distribusi tekanan dengan bentuk:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \left( \frac{\phi \mu c_t}{0,000264 k} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \tag{8}$$

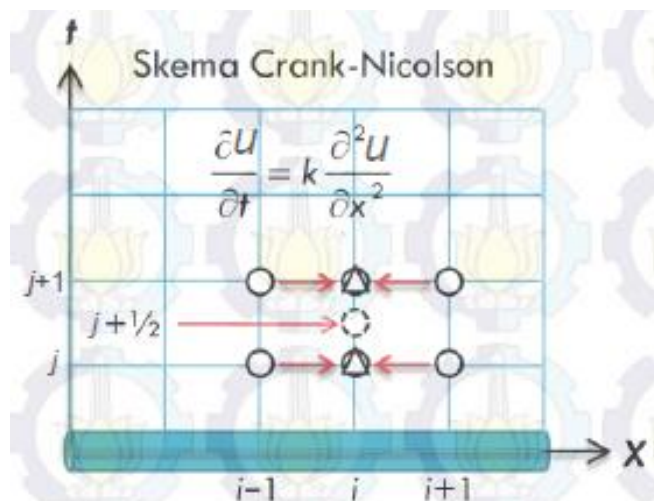
Dengan memisalkan  $\eta = \frac{0,000264 k}{\phi \mu c_t}$  diperoleh persamaan difusi aliran radial.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{9}$$

Pada koordinat silinder polar arah vertikal  $z$  bebas (*independent*). Sehingga dengan cara yang sama seperti pembentukan persamaan (9) dengan penambahan arah vertikal  $z$  diperoleh:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{10}$$

Untuk memperoleh solusi numerik dari persamaan (10) digunakan pendekatan beda hingga dengan cara menghampiri turunan parsial terhadap masing-masing arah pada koordinat  $P(r,z)$ . Metode beda hingga yang digunakan adalah skema Crank-Nicolson pada variabel tekanan  $P(x,t)$  di titik grid  $n+1/2$  bentuk skemanya sebagai berikut:



**Gambar 3:** Skema Crank-Nicolson untuk persamaan panas

Jadi, untuk menghampiri persamaan difusi (10) diperoleh turunan kedua dengan  $\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$  dan  $\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$  berdasarkan skema Crank-Nicholson (Singarimbun A. p., 2012) untuk arah radial  $r$  dan vertikal  $z$ . Pada turunan pertama  $\frac{\partial p}{\partial t}$  dan  $\frac{\partial p}{\partial r}$  dengan menerapkan beda pusat, diperoleh:

Untuk arah radial

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta r} + \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{2\Delta r} \quad (11a)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta r^2} \right) \quad (11b)$$

Untuk arah vertikal

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} \right) \quad (11c)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (11) ke persamaan (10) menjadi bentuk model persamaan panas bumi distribusi tekanan skema Crank-Nicholson adalah:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{\Delta r^2} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta r} + \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{\Delta r} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} \right) = \frac{1}{\eta} \left( \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} \right) \quad (12)$$

Tahap akhir, adalah diskritisasi persamaan (12) dengan asumsi  $r = 0$  dan  $i = 1$  didapat partisi pada koordinat silinder polar adalah

$$r_i = \left( i - \frac{1}{2} \right) \Delta r, \quad \Delta r = \frac{R_2}{m - \frac{1}{2}}, \quad \text{dengan } i = 1, 2, \dots, m,$$

Kecuali untuk  $i = 1$  dan  $i = m$  didefinisikan :  $r_1 = \Delta r/2$  dan  $r_m = R_2$ .

Didapat persamaan beda hingga koordinat silinder simetri sebagai berikut:

$$\left( \frac{P_{1,j}^{n+1} - P_{1,j}^n}{\Delta t} \right) = \frac{\eta}{2} \left( \frac{P_{2,j}^{n+1} - 2P_{1,j}^{n+1} + P_{2,j}^n - 2P_{1,j}^n}{\Delta r^2} + \frac{P_{2,j}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{P_{2,j}^n}{\Delta r^2} \right) + \frac{\eta}{2} \left( \frac{P_{1,j+1}^{n+1} - 2P_{1,j}^{n+1} + P_{1,j-1}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{P_{1,j+1}^n - 2P_{1,j}^n + P_{1,j-1}^n}{\Delta z^2} \right) \quad (13)$$

Dengan menggunakan asumsi grid uniform bahwa  $\Delta r = \Delta z$  sehingga persamaan (13) menjadi:

$$P_{1,j}^{n+1} - P_{1,j}^n = \frac{\eta \Delta t}{2(\Delta r)^2} [P_{2,j}^{n+1} - 2P_{1,j}^{n+1} + P_{2,j}^n - 2P_{1,j}^n + 2P_{2,j}^{n+1} + 2P_{2,j}^n + P_{1,j+1}^{n+1} - 2P_{1,j}^{n+1} + P_{1,j-1}^{n+1} + P_{1,j+1}^n - 2P_{1,j}^n + P_{1,j-1}^n] \quad (14)$$

Misalkan  $S = \frac{\eta \Delta t}{2(\Delta r)^2}$  maka persamaan (14) menjadi:

$$-SP_{1,j+1}^{n+1} + (1 + 4S)P_{1,j}^{n+1} - 3SP_{2,j}^{n+1} - SP_{1,j-1}^{n+1} = SP_{1,j+1}^n + (1 - 4S)P_{1,j}^n + 3SP_{2,j}^n + SP_{1,j-1}^n \quad (15)$$

Dalam bentuk matriks, persamaan (15) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$AP_1^{n+1} + BP_2^{n+1} = CP_1^n + K_1 + DP_2^n + K_2 \quad (16)$$

Persamaan (16) merupakan solusi numerik distribusi tekanan dengan persamaan difusi dua dimensi yang terbentuk dari skema Crank-Nicholson dari persamaan (15) yang akan dipenuhi jika

$$AP_1^{n+1} = CP_1^n + K_1 \text{ dan } BP_2^{n+1} = DP_2^n + K_2$$

#### D. Kesimpulan

Hubungan antara persamaan Darcy untuk fasa air pada aliran radial dengan persamaan kesetimbangan massa membentuk model matematis yaitu persamaan difusi, kemudian dimodifikasi dengan penambahan arah vertikal z sehingga menjadi persamaan difusi dua dimensi adalah:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Solusi numerik dari persamaan difusi dua dimensi untuk distribusi tekanan menggunakan skema Crank-Nicholson diperoleh persamaan matriks sistem persamaan linier yang terbentuk dari skema Crank-Nicholson adalah:

$$AP_1^{n+1} + BP_2^{n+1} = CP_1^n + K_1 + DP_2^n + K_2$$

#### E. Saran

##### Saran Teoritis

Pada penelitian ini yang telah dilakukan adalah sampai pada bentuk solusi numeriknya, untuk melihat distribusi tekanan dengan perhitungan manual, mungkin sulit dilakukan karena iterasi yang dilakukan cukup banyak. Oleh karena itu, dapat dibuat algoritma yang disimulasikan ke dalam pemrograman komputer untuk mendapatkan nilai distribusi tekanan dengan skema Crank-Nicholson.

##### Saran Praktis

Untuk perhitungan nilai distribusi tekanan pada reservoir panas bumi yang telah dimodelkan pada koordinat silinder simetri diperlukan validasi dengan data-data kondisi reservoir panas bumi fasa air.

#### Daftar Pustaka

- Ahmed, T., 1946, *Reservoir Engineering Handbook, 2nd Edition*. Woburn, MA: Butterworth-Heinemann publications.
- Gutierrez-Miravete, E., 2010, Finite Element Modelling with COMSOL : Aerospace Engineering Applications. *Numerical Methods for Partial Differential Equations. Chapter 7. , 11-19.*
- Kuzmin. ,t.thn., Finite Difference. Link: <http://www.mathematik.unidortmund.de/~kuzmin/cfdintro/lecture4.pdf>
- Mercer, C. R., 1979, *Water Resources Research*. Geothermal reservoir simulation: 2. Numerical solution techniques for liquid- and vapor-dominated hydrothermal systems, 31-46.
- Saptadji, N. M., 2009, *Sekilas tentang Panas Bumi*, Diktat Kuliah Prodi Megister Geothermal ITB.
- Singarimbun, A. d., 2012, *Internatioanal Journal of Energy and Environment*. Estimation of Parameter Distribution and Injection Process in Geothermal Reservoir, Issue 6, volume 6.