Pengaruh Faktor Sigma Pada Ekspansi Fungsi Periodik Melalui Eksplorasi Deret Fourier Termodifikasi

The Influence of Sigma Factor on The Expansion of The Periodic Function Through The Exploration of Modified Fourier Series

[1]Sutiyulia Yusliza, [2]Gani Gunawan, [3]Erwin Harahap
[1,2,3] Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung,
Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116
email : [1]sutiyusliza@gmail.com, [2] ggani9905@gmail.com, [3]erwin2h@gmail.com

Abstract. Fourier series is the result of a periodic function approach of the coefficients of the series in the form of sine and cosine. The Fourier series is obtained from of a periodic and continuous functions on each section, so that the Fourier series meets the Dirichlet conditions. In this article, exploration is conducted to all functions where a function is expanded into a Fourier series. At the time of exploration by using a graphic, there are a stepping around the points of discontinuity. To overcome these problems, the function is expanded into a Fourier series that has been modified of partial sums of Fourier series, called as the Modified Fourier Series. In the Modified Fourier Series, there is Sigma factor that may dampen leaps at points of discontinuity and apply to all functions of linear and non-linear.

Keywords: Fourier Series, Fourier Series Modified

Abstrak. Deret Fourier merupakan hasil penghampiran fungsi periodik dari koefisien-koefisien dari deret yang berupa sinus dan cosinus. Deret fourier diperoleh dari fungsi periodik dan kontinu pada setiap bagian, sehingga deret fourier memenuhi kondisi Dirichlet. Pada artikel ini, dilakukan eksplorasi untuk semua fungsi dimana sebuah fungsi diekspansi ke dalam deret Fourier. Pada saat ekplorasi dengan menggunakan gambar, terdapat sebuah loncatan disekitar titik-titik diskontinuitas. Untuk mengatasi permasalahan tersebut fungsi diekspansi ke dalam deret fourier yang telah mengalami modifikasi jumlah parsial deret Fourier, yaitu Deret Fourier Termodifikasi. Pada Deret Fourier Termodifikasi ini terdapat faktor sigma yang dapat meredam loncatan pada titik-titik diskontinuitas dan berlaku untuk semua fungsi linear dan non-linear.

Kata kunci *:* Deret Fourier, Deret Fourier Termodifikasi

A. Pendahuluan

Matematika mempunyai peranan penting di dalam menyelasaikan permasalahan ilmu pengetahuan. Dalam bidang matematika telah dikenal istilah deret (*series*). Deret ialah hasil jumlah suku-suku pada barisan, bentuknya $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ada beberapa macam deret yaitu : deret Taylor, deret Fourier, deret Kuasa, deret Aritmatika, dan sebagainya.

Pada penelitian ini akan membahas deret Fourier. Deret Fourier adalah deret yang merupakan hasil penghampiran fungsi periodik dimana komponen dari deret itu berupa fungsi kosinus dan atau sinus. Fungsi yang dapat di ekpansi ke dalam deret Fourier adalah fungsi periodik.

Sebuah jurnal yang dikembangkan oleh Gunawan G (2008) mengungkapkan bahwa melalui transformasi nilai rata-rata integral dari eskspansi fungsi deret Fourier dapat menghasilkan perkiraan nilai sigma yang teredam.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, identifikasi masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: “ Apakah pengaruh faktor sigma dalam ekspansi deret Fourier termodifikasi khusnya untuk fungsi non-linear ?”. Selanjutnya tujuan penelitian ini diuraikan dalam pokok-pokok sebagai berikut :

1. Mengetahui pengaruh faktor sigma dalam ekspansi deret Fourier termodifikasi.
2. Mengetahui pergerakan titik-titik fungsi jika di ekspansi ke dalam deret Fourier termodifikasi.

B. Landasan Teori

Konsep integral pertama kali di perkenalkan oleh Newton dan Leibniz. Tetapi tokoh yang memberikan definisi modern tentang integral ialah Bernhard Riemann, dengan gagasan pertamanya adalah jumlah Riemann. Berikut adalah definisi dari jumlah Riemann.

Jika fungsi $f(x)$ kontinu pada selang $[a,b]$ dan $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \Delta x$ adalah lebar partisi di $[a,b]$, maka untuk selang titik $\overline{x_k} \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2 \ldots$ berlaku:

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_k})\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

asalkan limit ada; dengan $\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})\Delta x_k$ disebut jumlah Riemann.

Fungsi yang dapat di ekspansi ke dalam deret Fourier ialah fungsi periodik. Fungsi periodik berdasarkan definisinya adalah :

Fungsi $f(x)$ dikatakan periodik dengan perioda P jika untuk setiap $x \in D_f$ berlaku $f(x) = f(x+P)$ dengan P adalah konstanta real positif.

Dan terdapat teorema

Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan periodik dengan periode P, maka

$$\int_{a+P}^{b+P} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Deret fourier adalah deret yang merupakan hasil penghampiran fungsi periodik dan komponennya berupa fungsi kosinus atau sinus. Deret fourier didefinisakn sebagai:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) \qquad (3)$$

Dengan koefisien-koefisien sebagai berikut:

$$\begin{cases} a_n & = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n & = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\,sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases} \qquad n = 0,1,2\ldots \qquad (4)$$

Kondisi dirichlet merupukan syarat cukup bagi suatu fungsi periodik yang diaproksimasikan oleh deret Fourier. Berikut adalah teorema dari kondisi dirichlet.

Jika $f(x)$ merupakan fungsi periodik berperiode 2π, bernilai tunggal pada kawasan $-\pi, +\pi$, nilai minimum dan maksimum fungsi tertentu, termasuk pula di titik kontinuitasnya, dan jika $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx$ terhingga, deret Fourier itu konvergen ke $f(x)$ di semua titik, di mana $f(x)$ kontinu. Deret Fourier bersifat konvergen ke titik tengah dari fungsi yang meloncat, termasuk pula di batas keperiodikannya ($\pm\pi$).

Andaikan:

i. $f(x)$ dapat ditentukan dan mempunyai harga tunggal (*single valued*) kecuali mungkin pada sejumlah titik-titik terhingga pada interval $(-L, L)$.

ii. $f(x)$ periodik dengan periode $2L$.

iii. $f(x)$ dan $f'(x)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada setiap segmennya pada interval $(-L, L)$

Kemudian deret (3) dengan koefisien (4) akan konvergen ke

a) $f(x)$ jika x adalah titik kontinuitas

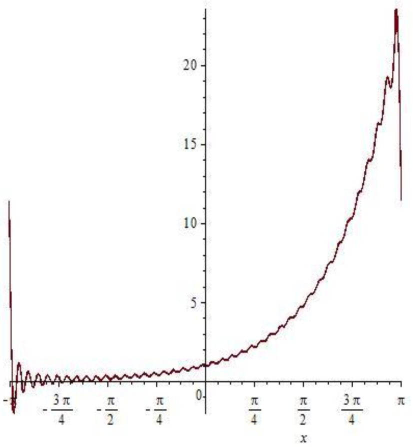
b) $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ jika x adalah titik non-kontinuitas

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

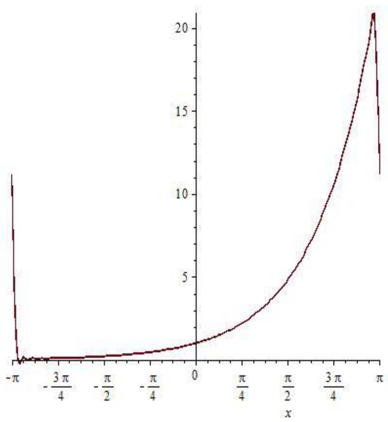
Ekspansi fungsi dilakukan pada dua bagian yaitu : deret Fourier dan deret Fourier termodifikasi. Fungsi yang akan di ekspansi ialah fungsi eksponensial, fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik dan fungsi polinomial. Eksplorasi fungsi menggunakan Maple 18. Berikut akan di tampilkan hasil ekspansi fungsi :

1. Ekspansi Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah fungsi yang mempunyai bentuk $\exp(x)$.



Gambar a.

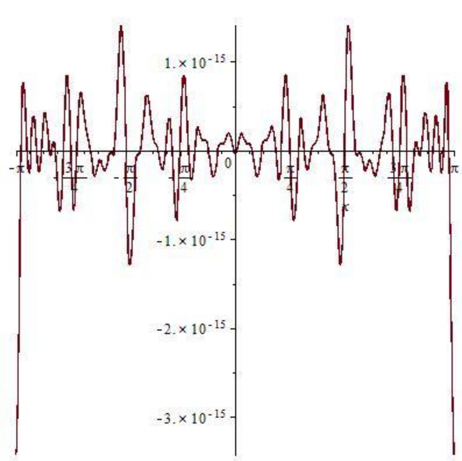


Gambar b.

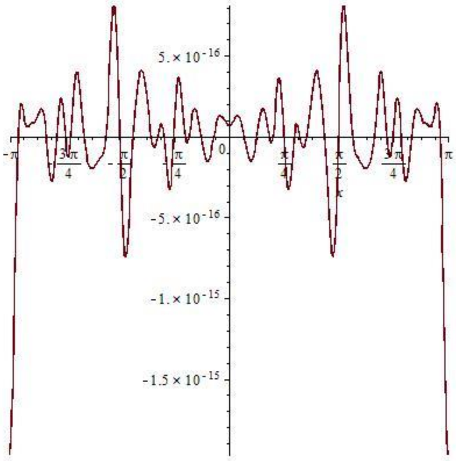
Gambar a. adalah ekspansi fungsi eksponensial ke dalam deret fourier dan tampak adanya loncatan di sekitar titik-titik diskontinuitas. Gambar b., merupakan ekspansi fungsi eksponensial ke dalam deret termodifikasi. Pada Gambar b.,setelah fungsi di ekspansi ke dalam deret Fourier termodifikasi yang memuat faktor sigma, loncatan di sekitar titik-titik diskontinuitas teredam.

2. Ekspansi Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri ialah suatu fungsi yang mempunyai bentuk (sinus, cosinus, tangen, kotangen, sekan dan kosekan). Fungsi yang di ekspansi adalah fungsi cosinus.



Gambar a.

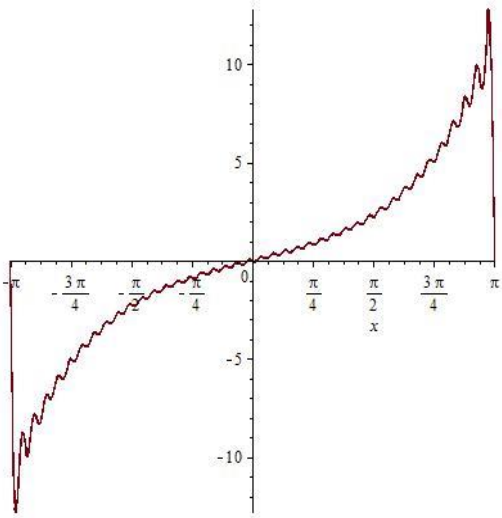


Gambar b.

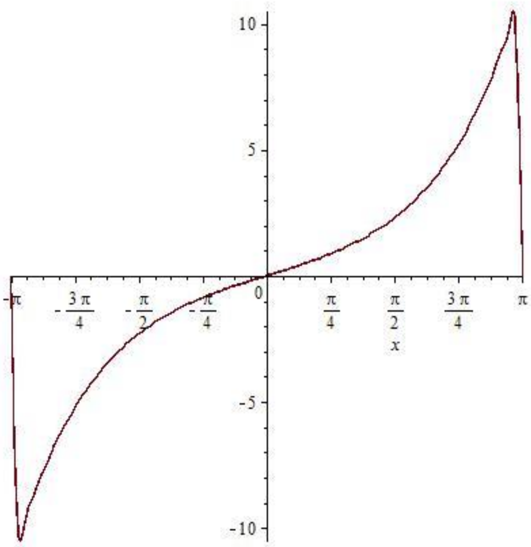
Gambar a. merupakan hasil ekspansi fungsi ke dalam deret Fourier dan tampak pada gambar terjadinya loncatan di sekitar titik-titik diskontinuitas. Gambar b. ialah hasil ekspansi fungsi ke dalam deret Fourier termodifikasi, yang memuat faktor sigma menyebabkan loncatan teredam sebagian.

3. Ekspansi Fungsi Hiperbolik

Fungsi hiperbolik mempunyai bentuk (sinh, cosh, tanh, sech). Fungsi yang akan di ekspansi ialah fungsi $\sinh(x)$.



Gambar a.



Gambar b.

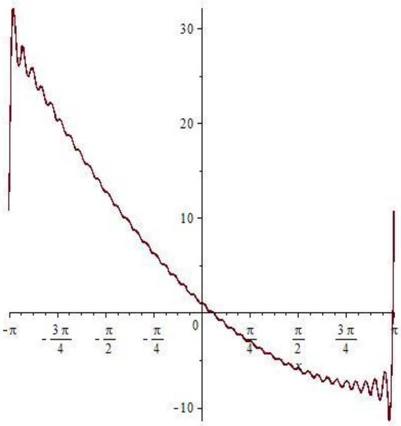
Gambar a. merupakan hasil ekspansi fungsi hiperbolik ke dalam deret Fourier dan menunjukkan adanya loncatan di sekitar titik-titik diskontinuitas. Gambar b. merupakan hasil ekspansi fungsi hiperbolik ke dalam deret Fourier termodifikasi yang memuat faktor sigma. Fungsi yang meloncat di ekspansi ke dalam deret Fourier termdofikasi konvergen ke titik tengahnya. Sehingga loncatan yang berada di sekitar titik-titik diskontinuitas teredam.

4. Ekspansi Fungsi Polinomial

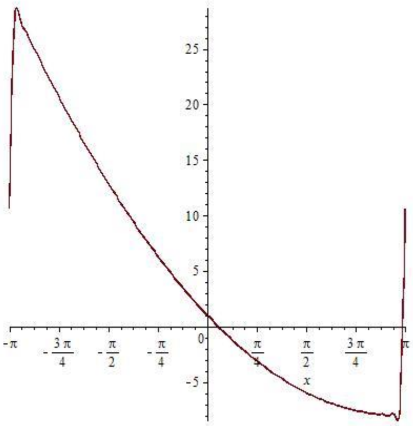
Fungsi polinomial merupakan fungsi suku banyak order atau pangkat n, n merupakan bilangan bulat positif. Fungsi tersebut dapat dinyatakan dengan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ dengan $a_n \neq 0$. Fungsi polinomial yang akan di ekspansi memiliki dua bentuk, yaitu fungsi kuadrat dan fungsi kubik.

a. Ekspansi Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah fungsi yang berpangkat dua.



Gambar a.

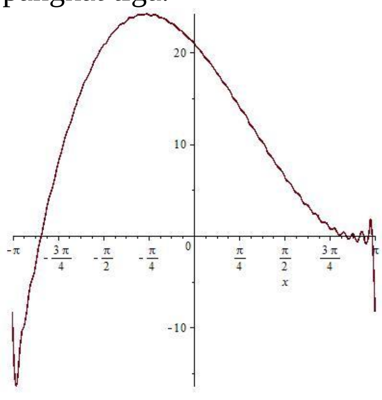


Gambar b.

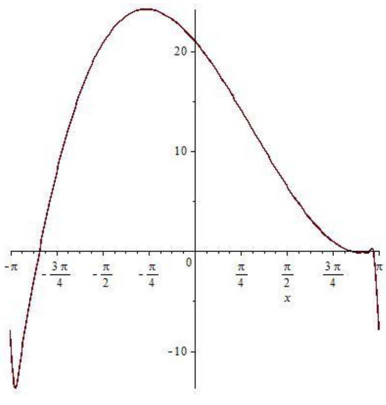
Gambar a. merupakan ekspansi fungsi kuadrat ke dalam deret Fourier dan terlihat pada gambar adanya loncatan di sekitar titik-titik diskontinuitas. Gambar b. ialah ekspansi fungsi kuadrat ke dalam deret Fourier termodifikasi. Fungsi yang mengalami loncatan di ekspansi ke dalam deret Fourier termodifikasi akan konvergen ke titik tengahnya. Deret Fourier termodifikasi memuat faktor sigma dan menyebabkan titik-titik di sekitar titik diskontinuitas teredam.

b. Ekspansi Fungsi Kubik

Fungsi kubik adalah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat tiga.



Gambar a.



Gambar b.

Gambar a. merupakan hasil ekspansi fungsi kubik ke dalam deret Fourier dan menunjukkan adanya loncatan di sekitar titik-titik diskontinuitas. Gambar b. ialah hasil ekspansi fungsi kubik ke dalam deret Fourier termodifikasi yang memuat faktor sigma. Ekspansi fungsi kubik ke dalam deret Fourier termodifikasi akan konvergenn ke titik tengahnya.

D. Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi di atas, dapat di simpulakan bahwa fungsi yang di ekspansi ke dalam deret Fourier di titik diskontinuitasnya akan konvergen ke titik tengah. Pengaruh faktor sigma untuk fungsi yang di ekspansi ke dalam deret Fourier termodifikasi ialah mampu meredam loncatan yang terjadi di sekitar titik diskontinuitas.

Daftar Pustaka

Jati, B.M.E., & Priyambodo, T.K. 2011. Matematika untuk Ilmu Fisika & Teknik, Yogyakarta: Penerbit Andi

Gunawan, G. 2008. Transformation of the Mean Value of Integral on Fourier Series Expantion, Jurnal Matematika. Bandung Islamic Univercity (UNISBA)

Murray R. Spiegel. 1986. Analisis Fourier, Jakarta: Erlangga.

Purcell, Edwin J., Varberg, Dell.1987. Kalkulus dan Geometri Analitis,

Edisi 5 Jilid 1, Erlangga.