# Simulasi Konduktivitas Panas pada Balok dengan Metode Beda Hingga

The Simulation of Thermal Conductivity on Shaped Beam with Finite Difference Method

[1]Maulana Yusri Miladi, [2]Gani Gunawan [3]Respitawulan
[1,2,3] *Prodi Matematika, FakultasMatematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116*
*email: [1]maulhamid4@gmail.com, [2]ggani9905@gmail.com,[3]respitawulan@gmail.com*

**Abstract.**Packaging food in cans is preservation technology through the sterilization process. In the process of sterilization,to guarantee the quality of the canned food,it is necessary to observethe propagation of heat againts time. Therefore, it is necessary to study the thermal conductivity in a tin shaped beam. Heat equation on a block shaped can isderived from the volumetric change of the object along with the change of the edges' length. The numerical solution of heat equation then obtained by discretizing the *x*, *y* and *z*axis using the finite difference method. The solution presents the temperature for on a block shaped can in a steady state condition. The simulation of thermal conductivity on a 10cm x 10cm x 20cm can is made withinitial condition of 0 ℃ and boundary conditions of100 ℃. The time required to raise the temperature at the center point of the canto 100℃ is 13 minutes.

**Keywords:*Heat Transfer, Finite Difference, Steady State.***

**Abstrak.**Pengemasan makanan dalam kaleng merupakan teknologi pengawetan yang melalui proses sterilisasi. Dalam proses sterilisasi perlu dilihat cepat rambat panas terhadap waktu. Hal itu bertujuan untuk menjamin mutu dari makanan. Oleh karena itu perlu dilakukan penelitian mengenai konduktivitas panas pada kaleng yang berbentuk balok. Persamaan panas pada balok diperoleh dari perubahan volume benda dengan adanya perubahan panjang tiap rusuknya. Kemudian dari persamaan panas pada balok solusi numerik persamaan panas diperoleh dengan mendiskritkan sumbu *x*,*y*,*z* menggunakan metode beda hingga. Solusi tersebut mempresentasikan suhu di dalam kaleng berbentuk balok dalam keadaan *steady state*. Simulasi konduktivitas panas dibuat dengan syarat awal 15℃ dan syarat batas 120℃ dengan ukuran balok 10cm x 10cm x 20cm. Kemudian dapat ditafsirkan bahwa waktu yang dibutuhkan untuk menaikkan suhu pada titik pusat kaleng berbentuk balok agar sama dengan suhu pemanasan memerlukan waktu 13 menit.

**Kata Kunci : Konduktivitas panas, Beda hingga, Steady State.**

## A. Pendahuluan

Pola hidup masyarakat pada saat ini menuntut adanya inovasi produk pangan yang instan. Oleh karena itu, industri pangan berkompetisi untuk menciptakan makanan instan dan cepat saji dengan kemasan yang aman dan unik. Jenis kemasan setiap produk pun berbeda-beda tergantung dari karakteristik produk tersebut. Salah satu kemasan makanan yang sering beredar di masyarakat yaitu kaleng.

Secara umum kaleng yang digunakan berbentuk tabung. Namun dalam kenyataannya tidak jarang ditemui kemasan kaleng yang berbentuk balok. Duran (1810) menyatakan bahwa kaleng dipilih sebagai kemasan makanan karena sifatnya yang kedap udara, relatif ringan, mudah dibentuk, dan tidak mudah pecah. Mengemas makanan dalam kaleng merupakan salah satu teknologi pengawetan makanan yang melalui proses sterilisasi dengan suhu yang ditentukan. Proses sterilisasi adalah salah satu terapan dari ilmu perpindahan panas (*heattransfer*) secara konduksi.

Perpindahan panas secara konduksi adalah proses perpindahan panas dari daerah bersuhu tinggi ke daerah bersuhu rendah dengan media penghantar panas tetap. Oleh karena itu, dalam proses sterilisasi perlu dilihat kecepatan perambatan panas terhadap benda tersebut. Untuk melihat cepat rambat suatu panas terhadap benda, secara matematis perlu dilakukan simulasi. Agar nantinya didapatkan kombinasi waktu dan suhu yang optimal.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka dalam artikel ini akan dilakukan simulasi secara numerik konduktivitas panas pada kaleng berbentuk balok.

## B. Landasan Teori

### Perpindahan panas

Menurut Cengel(2006) perpindahan panas dikenal dengan tiga cara pemindahan yang berbeda yaitu konduksi, konveksi, dan radiasi.

1. Konduksi atau hantarani adalah proses perpindahan panas dari daerah bersuhu tinggi ke daerah bersuhu rendah dengan media penghantar panas tetap.
2. Konveksi adalah perpindahan panas yang terjadi antara permukaan padat dengan fluida yang mengalir di sekitarnya dengan menggunakan media penghantar berupa fluida (cairan/gas).
3. Radiasi adalah perpindahan panas yang terjadi karena pancaran atau radiasi gelombang elektro-magnetik, tanpa memerlukan media perantara.

### Metode beda hingga

Beda hingga digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinyu menjadi bentuk diskrit. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk tersebut dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor.

Untuk diferensial terpusatturunan kedua terhadap *x*, *y* dan *z* dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i-1,j,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} \quad (1)$$

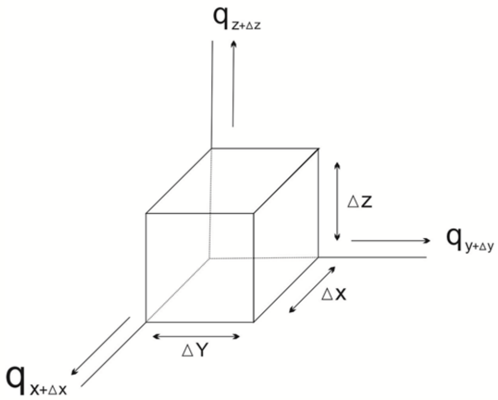
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j-1,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{f_{i,j,k-1} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j,k+1}}{\Delta z^2} \quad (3)$$

## C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

### Model matematis konduktivitas panas pada balok

Berikut adalah penelitian mengenai pemodelan matematis konduktivitas pada balok. Menurut Cengel(2006), persamaan konduksi panas pada dimensi tiga dapat diturunkan melalui perubahan volume benda dengan adanya perubahan panjang tiap rusuknya$\Delta x$, $\Delta y$, dan $\Delta z$ dengan asumsi panjang, lebar dan tinggi padabalokmasing-masing sejajar dengan sumbu*x*, *y* dan *z* seperti yang ditunjukkan pada gambar 1.




**Gambar 1**. Konduktivitas panas melalui perubahan volume

Perubahan massa benda adalah $\Delta m = \rho\Delta V = \rho\Delta x\Delta y\Delta z$, dengan jumlah panas pada benda saat waktu t adalah :

$$Q(x,y,z,t,\Delta x,\Delta y,\Delta z) = c\Delta m T(x,y,z,t) = c\rho\Delta x\Delta y\Delta z T(x,y,z,t) \tag{4}$$

Laju perubahan jumlah panas pada benda (*x*,*y*,*z*) pada waktu t diberikan oleh :

$$\frac{dQ}{dt} = c\rho\Delta x\Delta y\Delta z\ \frac{\partial T}{\partial t} \tag{5}$$

Sesuai dengan prinsip kekekalan energi, yaitu rata-rata perubahan panas harus sama dengan aliran panas yang masuk dikurangi aliran panas yang keluar, maka didapat :

$$\frac{dQ}{dt} = q_x + q_y + q_z - q_{x+\Delta x} - q_{y+\Delta y} - q_{z+\Delta z} \tag{6}$$

Subtitusikan persamaan (4) kedalam persamaan (5), dapat dituliskan sebagai :

$$c\rho\Delta x\Delta y\Delta z\ \frac{\partial T}{\partial t} = q_x + q_y + q_z - q_{x+\Delta x} - q_{y+\Delta y} - q_{z+\Delta z} \tag{7}$$

Dengan mengalikan ruas kanan dan ruas kiri$\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}$, maka didapat :

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta y\Delta z}\left(\frac{q_{x+\Delta x}-q_x}{\Delta x}\right) - \frac{1}{\Delta x\Delta z}\left(\frac{q_{y+\Delta x}-q_x}{\Delta y}\right) - \frac{1}{\Delta x\Delta y}\left(\frac{q_{z+\Delta z}-q_z}{\Delta z}\right) \tag{8}$$

Persamaan panas konduksi pada sumbu *x*,*y* dan *z* dapat dituliskan sebagai berikut :

$$q_x = -kA_x\frac{\partial T}{\partial x} \tag{9}$$

$$q_y = -kA_y\frac{\partial T}{\partial y} \tag{10}$$

$$q_z = -kA_z\frac{\partial T}{\partial z} \tag{11}$$

Dari persamaan (8) diberikan limit untuk ruas kanan dengan $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z \rightarrow 0$, maka dapat ditunjukan oleh persamaan di bawah ini :

$$\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{1}{\Delta y\Delta z}\left(\frac{q_{x+\Delta x}-q_x}{\Delta x}\right)=\frac{1}{\Delta y\Delta z}\frac{\partial q_x}{\partial x}=\frac{1}{\Delta y\Delta z}\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\Delta y\Delta z\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad (12)$$

$$\lim_{\Delta y\rightarrow 0}\frac{1}{\Delta x\Delta z}\left(\frac{q_{y+\Delta y}-q_y}{\Delta y}\right)=\frac{1}{\Delta x\Delta z}\frac{\partial q_y}{\partial y}=\frac{1}{\Delta x\Delta z}\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\Delta x\Delta z\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \quad (13)$$

$$\lim_{\Delta z\rightarrow 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y}\left(\frac{q_{z+\Delta z}-q_z}{\Delta z}\right)=\frac{1}{\Delta x\Delta y}\frac{\partial q_z}{\partial z}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}\frac{\partial}{\partial z}\left(-k\Delta x\Delta y\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(-k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (14)$$

Persamaan (12) sampai dengan persamaan (14) disubtitusikan ke persamaan (8) dapat dinyatakan sebagai berikut:

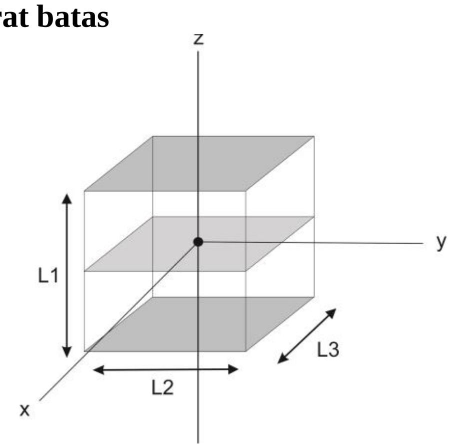
$$\frac{c\rho}{k}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\nabla^2 T \quad (15)$$

Dengan $\frac{1}{\alpha}=\frac{c\rho}{k}$ ,$\frac{1}{\alpha}$adalah konstanta penghamburan panas dan $\nabla^2 T$adalah operator laplace dan persamaan (15) inilah yang disebut sebagai persamaan panas pada benda dimensi tiga dalam koordinat kartesius.

Dalam penelitian yang akan dilakukan, kondisi termal kaleng adalah *steady state* artinya tidak bergantung terhadap waktu $\frac{\partial T}{\partial t}=0$. Maka persamaan (15) ditulis menjadi persamaan Laplace 3 dimensi :

$$\nabla^2 T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \quad (16)$$

**1. Syarat awal dan syarat batas**




**Gambar2**. Kaleng berbentuk balok

1. Syarat Awal

Pada *initial time* suhu awalnya adalah sama untuk seluruh bagian kaleng dan dinyatakan sebagai $T(x,y,z)$ dalam kasus ini diasumsikan suhu normal di dalam ruangan.

2. Syarat Batas

$T(x,y,z)$ dimana x = 0 adalah suhu di belakang kaleng,
$T(x,y,z)$ dimana x = $L_3$ adalah suhu di depan kaleng,
$T(x,y,z)$ dimana y = 0 adalah suhu di kiri kaleng,
$T(x,y,z)$ dimana y = $L_2$ adalah suhu di kanan kaleng,
$T(x,y,z)$ dimana z = 0 adalah suhu di bawah kaleng,
$T(x,y,z)$ dimana z = $L_1$ adalah suhu di depan kaleng.dengan , Suhu di sekeliling kaleng;dengan ,, Suhu di dasar kaleng;dengan , Suhu di atas kaleng.

### 2. Diskritisasi Model Matematis

Untuk melakukan simulasi dari permasalahan model konduktivitas panas pada balok akan menggunakan metode beda hingga untuk mendapatkan solusi numeriknya. Konsep yang digunakan pada metode beda hingga adalah mengubah sistem persamaan diferensial parsial dengan mendiskritkan ruang domainnya. Ruang (x,y,z) didiskritisasi dengan titik ($i = 1,2,3,...,N$) untuk sumbu x, titik ($j = 1,2,3,....,M$) untuk sumbu y, dan titik ($k = 1,2,3,...,P$) untuk sumbu z.

Beda terpusat pada ruang dimensi tiga diferensiasi kedua :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} \quad (18)$$

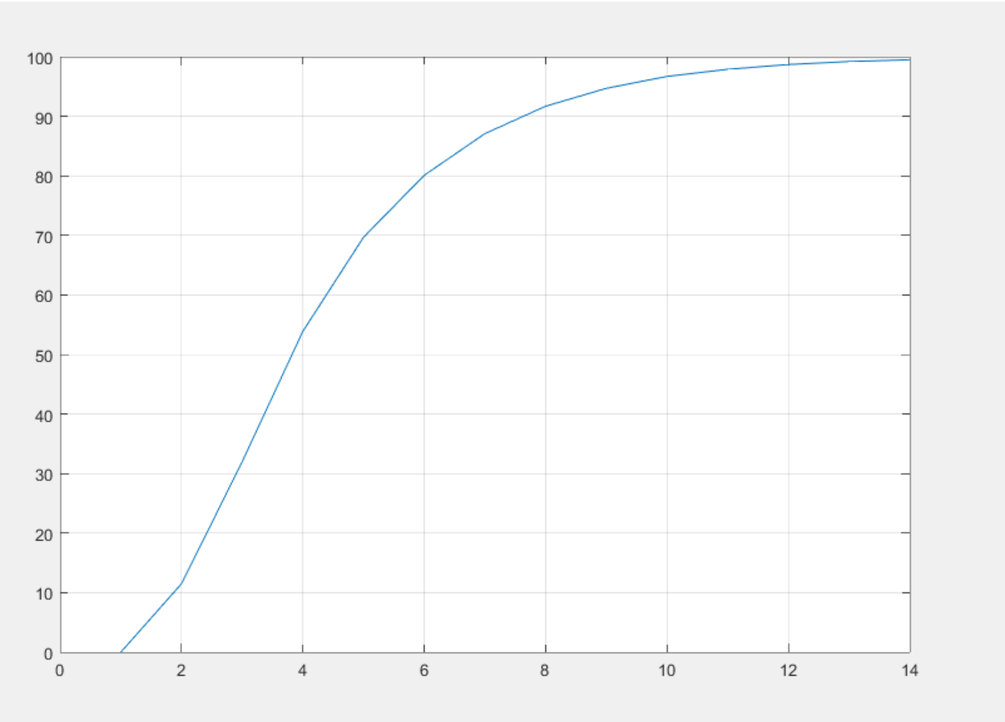
$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{i,j,k-1} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j,k+1}}{\Delta z^2} \quad (19)$$

Kemudian persamaan (17) sampai (19) disubtitusikan ke dalam persamaan konduktivitas panas pada balokdalam keadaan *steady state* (16), sehingga bisa ditulis sebagai berikut:

$$T_{i,j,k} = \frac{T_{i-1,j,k} + T_{i+1,j,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j,k-1} + T_{i,j,k+1}}{6} \quad (20)$$

### 3. Proses Simulasi

Misalkan terdapat sebuah kaleng berbentuk balok berukuran 10cm x 10cm x 20cm, diberikan kondisi awal suhu di dalam kaleng tersebut 0°C. Kemudian kaleng tersebut dipanaskan dengan suhu 100°C maka akan dihitung distribusi panas ke pusatkaleng tersebut dengan asumsi panas yang diterima oleh kaleng tersebut merata di setiap sisinya.




**Gambar 3**. Cepat rambat ke pusat balok

Dari gambar3 dapat ditafsirkan bahwa cepat rambat ke pusat kaleng berbentuk balok memerlukan waktu yang cukup lama yaitu 13 menit agar suhu pada titik pusat balok memiliki suhu yang sama dengan suhu pemanasan yaitu 100℃. Dengan kondisi awal 0℃pada menit pertama sampai menit ke enam kenaikan suhu pada titik pusat kaleng $T(3,3,5)$ cenderung lambat. Dan pada menit ke tujuh sampai menit ke 13 kenaikan suhu ke titik pusat kaleng cenderung berkurang.

## D. Kesimpulan

Hitungan proses simulasi konduktivitas panas pada balok dengan ukuran 10cm x 10cm x 20cm. Menunjukkan waktu yang dibutuhkan untuk memanaskan kaleng berbentuk balok tersebut, agar suhu pada titik pusat balok sama dengan suhu pemanasan (100℃) membutuhkan waktu 13 menit. Ini berarti dibandingkan dengan kemasan berbentuk tabung yang telah diteliti, bentuk balok memiliki kekurangan dalam hal cepat rambat panas yang lama karena cepat rambat suhu pada pusat tabung hanya membutuhkan waktu 6 menit agar titik pusat tabung tersebut mempunyai suhu yang sama dengan suhu pemanasan. Hal ini memberikan gambaran bahwa perilaku laju perambatan suhu pada titik pusat balok yaitu koordinat $\boldsymbol{T(3,3,5)}$ cukup cepat pada awal pemanasan. Namun, pada pertengahan iterasi laju perambatan suhu pada titik pusat balok menurun.

## E. Saran

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan kondisi kaleng berada pada keadaan *unsteady state*. Dimana metode beda hingga menggunakan skema eksplisit. Dengan demikian perambatan panas pada kaleng berbentuk balok akan bergantung pada waktu.

## Daftar Pustaka

Ardian, Dedik, Lukman H., Mardlijah. 2007. Heat equation analize and sterilized value of canned food sterilization process. ITS Surabaya.

Cengel, A. Yunus. 2006. Heat Transfer A Practical Approach Second Edition.

Kreyzig, Erwin. 1988. *Matematika Teknik Lanjutan (dalam 2 jilid)*. Gramedia.

Mathwork. Array Multidimensional. www.mathworks.com/arraymultidimensional (diakses 16 Juni 2016).

Pitts R. Donald, Sissom E. Leighton, Teori dan soal-soal perpindahan kalor edisi kedua. 2008. Erlangga.

Triatmodjo, Bambang. 2002. Metode Numerik dilengkapi dengan program komputer. Yogyakarta: Beta Offset.