Optimisasi Fungsi Nonlinier Dua Variabel Bebas dengan Satu Kendala Pertidaksamaan Menggunakan Syarat Kuhn-Tucker

Optimization of Nonlinear Function of Two Independent Variables with Inequality Constraints Using Kuhn-Tucker Conditions

[1]Hilmi Ardiansyah, [2] Gani Gunawan, [3] Respitawulan

[1,2,3]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl.Tamansari No.1 Bandung 40116

email: [1]hilmiardiansyah11@gmail.com, [2]ggani9905@gmail.com, [2]respitawulan@gmail.com

Abstract. Many problems of optimization can be modelled in nonlinear function that is constrained by a constraints inequality. Kuhn-Tucker conditions are one of technique in nonlinear programming which can solve them in analytic. The result of discussion shows that the Kuhn-Tucker conditions for determining maximum values are partial differential of Lagrange function against independent variable is non positive and partial differential of Lagrange function against that Lagrange multiplier is equal to zero, with each independent variable are non negative and Lagrange multiplier is positive where complementary slackness conditions are fulfilled. In contrary, Kuhn-Tucker conditions for determining minimum values are the same as Kuhn-Tucker conditions for determining maximum values, however the partial differential of Lagrange function against independent variable are non negative. If the Kuhn-Tucker theorem is fulfilled, then the conditions of Kuhn-Tucker is sufficient and necessary conditions for determining the optimizer point. However, if it is not fulfilled the Kuhn-Tucker theorem, then the conditions of Kuhn-Tucker is just become necessary conditions for determining the optimizer points.

Keywords: nonlinear progamming, Kuhn-Tucker, complementary slackness.

Abstrak. Banyak permasalahan optimisasi yang dapat dimodelkan dalam bentuk fungsi nonlinier yang dibatasi suatu kendala pertidaksamaan. Syarat Kuhn-Tucker adalah salah satu teknik dalam pemrograman nonlinier yang dapat menyelesaikan permasalahan optimisasi tersebut secara analitik. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa syarat Kuhn-Tucker untuk menentukan nilai maksimum adalah turunan parsial fungsi Lagrange terhadap variabel bebasnya adalah non-positif dan turunan parsial fungsi Lagrange terhadap pengali Lagrange-nya adalah sama dengan nol, dengan variabel bebas adalah non-negatif dan pengali Lagrange adalah positif, dan kondisi-kondisi *complementary slackness* dipenuhi. Sebaliknya, syarat Kuhn-Tucker untuk menentukan nilai minimum yaitu sama dengan syarat Kuhn-Tucker untuk menentukan nilai maksimum, hanya saja pada turunan parsial fungsi Lagrange-nya terhadap variabel bebas diganti menjadi non-negatif. Jika permasalahan optimisasi memenuhi teorema kecukupan Kuhn-Tucker, maka syarat Kuhn-Tucker merupakan syarat cukup dan syarat perlu dalam menentukan titik optimum. Tetapi, jika tidak memenuhi teorema kecukupan Kuhn-Tucker, maka syarat Kuhn-Tucker hanya menjadi syarat perlu dalam menentukan titik optimum.

Kata kunci: ***pemrograman nonlinier, Kuhn-Tucker, complementary slackness.***

A. Pendahuluan

Secara analitik, saat ini metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi yaitu menentukan nilai optimum (nilai maksimum atau nilai minimum) pada fungsi nonlinier bersyarat atau berkendala adalah metode Lagrange. Metode Lagrange dapat menyelesaikan masalah optimisasi fungsi nonlinier dengan kendala berupa suatu persamaan. Dengan kendala berupa suatu persamaan, maka titik optimum akan berada pada titik singgung antara fungsi tujuan dengan fungsi kendala. Padahal pada kenyataannya bisa saja kendala berupa pertidaksamaan. Dengan kata lain, pada kenyataannya titik optimum tidak hanya terjadi pada titik singgung antara fungsi tujuan dan fungsi kendala, bisa saja titik optimum berada pada bagian dalam daerah penyelesaian (interior solution). Oleh karena itu, untuk dapat menyelesaikan permasalahan optimisasi fungsi nonlinier dengan kendala berupa pertidaksamaan dibutuhkan suatu metode khusus.

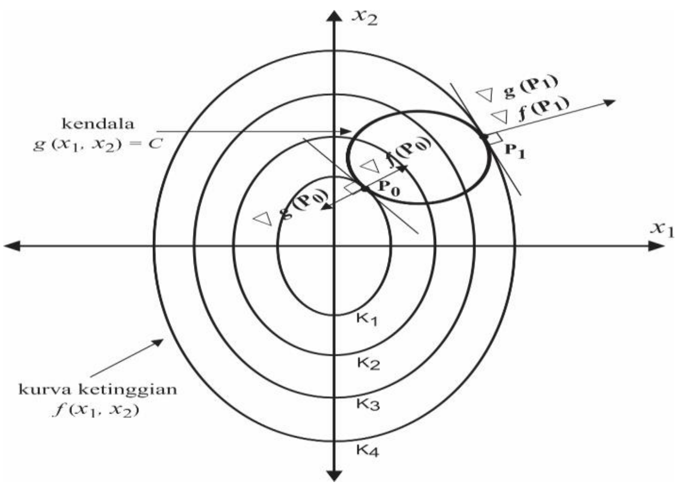
Salah satu metode yang dapat menyelesaikan permasalahan optimisasi fungsi nonlinier dengan kendala berupa pertidaksamaan menggunakan perhitungan secara analitik adalah syarat Kuhn-Tucker. Metode ini dikemukakan oleh H.W Kuhn dan A.W Tucker pada tahun 1951. Syarat Kuhn Tucker adalah suatu teknik optimisasi yang dapat digunakan untuk pencarian titik optimum dari suatu fungsi bersyarat atau berkendala, dengan kendala berupa pertidaksamaan.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka perumusan masalah dalam penelitian ini permasalahan yang akan diangkat dalam tugas akhir ini adalah bagaimana cara menentukan titik optimum pada masalah optimisasi fungsi nonlinier dua variabel bebas dengan satu kendala pertidaksamaan menggunakan syarat Kuhn-Tucker. Selanjutnya, tujuan dari penulisan karya ilmiah ini adalah untuk mengetahui bagaimana cara menentukan titik optimum pada masalah optimisasi fungsi nonlinier dua variabel bebas dengan satu kendala berupa pertidaksamaan menggunakan syarat Kuhn-Tucker.

B. Landasan Teori

Bentuk umum dari permasalahan optimisasi ini adalah

Maskimumkan / minimumkan : $f(x_1, x_2)$
dengan kendala : $g(x_1, x_2) = C$



Gambar 1. Contoh Optimisasi dengan Kendala Persamaan

Dari gambar di atas terlihat bahwa kurva ketinggian $f(x_1, x_2) = k$ menyinggung kurva kendala $g(x_1, x_2) = C$, yaitu di k_1 dan k_4. Secara geometri, dari gambar di atas bahwa kurva ketinggian menyinggung kurva kendala di titik P_0 dan P_1. Ini menunjukkan bahwa nilai maksimum atau minimum f terhadap kendala $g(x_1, x_2) = C$ akan terjadi di salah satu titik singgung.

Metode Lagrange menyediakan suatu prosedur untuk menentukan titik-titik P_0 dan P_1. Karena di titik-titik tersebut, kurva ketinggian dan kurva kendala saling menyinggung (memiliki garis singgung bersama). Ini berarti bahwa garis normal di titik tempat kurva ketinggian dan kurva kendala bersinggungan adalah identik. Dengan demikian vektor-vektor gradiennya sejajar, atau

$$\nabla f(x_1, x_2) = \lambda \nabla g(x_1, x_2)$$

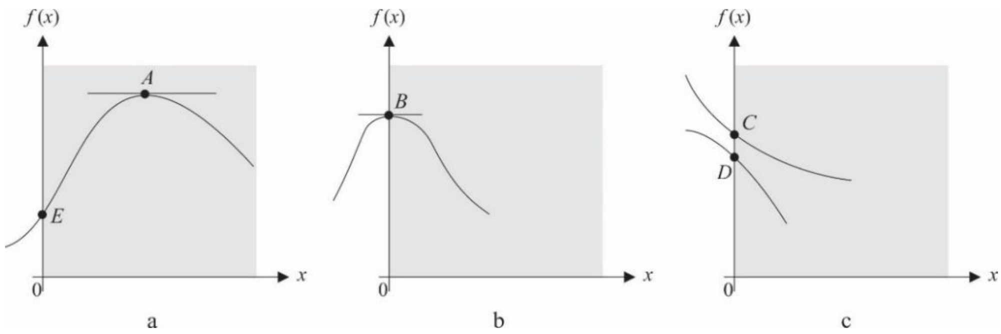
untuk suatu skalar $\lambda \in R$.

Dampak dari Batasan Non-negatif

Tinjau permasalahan mencari nilai maksimum dengan batasan non-negatifitas pada fungsi satu variabel bebas tanpa kendala atau syarat yang lain, maka didapatkan permasalahan

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimumkan} & : f(x) \\ \text{dengan} & \quad x \geq 0 \end{array}$$

di mana fungsi diasumsikan dapat didiferensialkan. Berdasarkan batasan $x \geq 0$, terdapat tiga kemungkinan yang mungkin muncul.



Gambar 2. Contoh Maksimum Lokal

Syarat perlu dalam Gambar 2a dan Gambar 2b agar *x* memberikan maksimum lokal adalah $df/dx = f'(x) = 0$. Pada Gambar 2c suatu maksimum lokal ditunjukkan oleh titik *C* dan *D*, karena untuk memenuhi kualifikasi sebagai suatu maksimum lokal dalam Gambar 2.3, titik kandidat hanyalah harus lebih tinggi dari titik sekitarnya dalam daerah yang layak.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa agar nilai x memberikan maksimum lokal $f'(x)$ dalam Gambar 2, maka salah satu dari ketiga kondisi berikut harus dipenuhi

$$\begin{array}{llll} f'(x) = 0 & \text{dan} & x > 0 & [\text{titik } A] \\ f'(x) = 0 & \text{dan} & x = 0 & [\text{titik } B] \\ f'(x) < 0 & \text{dan} & x = 0 & [\text{titik } C \text{ dan } D] \end{array}$$

Pertidaksamaan ketiga pada kondisi di atas merupakan sebuah persamaan yang menyatakan kondisi penting, bahwa dari kedua kuantitas x dan $f'(x)$ setidaknya salah satunya harus memiliki nilai nol, sehingga hasil kali dari keduanya bernilai nol. Kondisi ini disebut *complementary slackness* antara x dan $f'(x)$.

Jika ketiga kondisi di atas digabungkan, maka akan didapatkan satu kondisi baru yaitu

$$f'(x) \leq 0\,, \qquad x \geq 0\,, \qquad x\,f'(x) = 0$$

Jika permasalahan mencari nilai maksimumnya pada fungsi dua variabel bebas yang memiliki bentuk umum

$$\begin{aligned} &\text{Maksimumkan : } && z = f(x_1, x_2) \\ &\text{dengan} && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Maka syarat perlunya $\partial z/\partial x_1\,, \partial z/\partial x_2 = 0$ harus diubah dengan cara serupa yang mendasari pencarian nilai maksimum pada fungsi satu variabel bebas. Sehingga didapat syarat perlu untuk mencari nilai maksimum pada fungsi dua variabel bebas tanpa kendala yaitu

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} \leq 0\,, \quad x_1 \geq 0\,, \quad \text{dan} \quad x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} \leq 0\,, \quad x_2 \geq 0\,, \quad \text{dan} \quad x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$$

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Bentuk umum dari permasalahan memaksimumkan fungsi nonlinier dua variabel bebas yang dipengaruhi oleh satu kendala pertidaksamaan adalah

$$\begin{aligned} &\text{Maksimumkan} && : f(x_1, x_2) \\ &\text{dengan kendala} && : \mathrm{g}(x_1, x_2) \leq C \end{aligned}$$

dengan *C* adalah suatu konstanta.

Untuk menyelesaikan masalah memaksimumkan tersebut dapat ditambahkan variabel *slack* (s) nonnegatif pada fungsi kendala dan asumsikan bahwa setiap variabel bernilai nonnegatif, dengan menambahkan variabel *slack* yang non-negatif pada fungsi kendala, permasalahan optimisasi fungsi dengan kendala pertidaksamaan berubah menjadi permasalahan optimisasi dengan kendala persamaan, sehingga dapat dibentuk fungsi Lagrange L yaitu

$$L = f(x_1, x_2) - \lambda[g(x_1, x_2) + s - C]$$

dengan syarat perlunya adalah

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \leq 0\,, \quad x_1 \geq 0\,, \quad \text{dan} \quad x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} \leq 0\,, \quad x_2 \geq 0\,, \quad \text{dan} \quad x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial s} \leq 0\,, \quad s \geq 0\,, \quad \text{dan} \quad s \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial s} \leq 0\,, \quad s \geq 0\,, \quad \text{dan} \quad s \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

Dengan menggabungkan dua baris terakhir akan didapatkan $-\lambda \leq 0,\ s \geq 0,$ dan $-\lambda s = 0$, tetapi karena λ tidak boleh sama dengan nol, maka kondisinya berubah menjadi $-\lambda < 0,\ s = 0$ dan $-\lambda s = 0$ atau sama dengan

$$\lambda > 0\,, \quad s = 0\,, \quad \text{dan} \quad \lambda s = 0$$

Karena $g(x_1, x_2) + s = C$ ekuivalen dengan $s = C - g(x_1, x_2)$, maka dengan mensubstitusikan nilai s pada syarat perlu akan didapat

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \leq 0\,, \quad x_1 \geq 0\,, \quad \text{dan} \quad x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} \leq 0\,, \quad x_2 \geq 0\,, \quad \text{dan} \quad x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$
$$C - g(x_1, x_2) = 0, \quad \lambda > 0, \quad \text{dan} \quad \lambda[C - g(x_1, x_2)] = 0$$

Kondisi tersebut merupakan syarat Kuhn-Tucker untuk permasalahan memaksimumkan fungsi nonlinier dua variabel bebas dengan satu kendala pertidaksamaan.

Jika permasalahannya meminimumkan fungsi nonlinier dua variabel bebas dengan satu kendala pertidaksamaan yang memiliki bentuk umum sebagai berikut

$$\begin{array}{ll} \text{Minimumkan} & : f(x_1, x_2) \\ \text{dengan kendala} & : \mathrm{g}(x_1, x_2) \geq C \end{array}$$

dengan *C* adalah suatu konstanta.

Untuk menyelesaikan masalah meminimumkan tersebut dapat dilakukan cara yang sama dengan masalah memaksimumkan, sehingga akan didapat syarat perlu untuk meminimumkan, yaitu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \geq 0\,, \qquad x_1 \geq 0\,, \qquad \text{dan} \qquad x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} \geq 0\,, \qquad x_2 \geq 0\,, \qquad \text{dan} \qquad x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$g(x_1, x_2) - C = 0, \quad \lambda > 0, \qquad \text{dan} \qquad \lambda[g(x_1, x_2) - C] = 0$$

Teorema 1 *(Chiang, 1984 : 223)*
Misalkan terdapat masalah optimisasi pemrograman nonlinier dengan kendala sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} \textit{Maksimumkan} & : f(x_1, x_2) \\ \textit{dengan kendala} & : g(x_1, x_2) \leq C \\ \textit{dan} & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

dengan C adalah suatu konstanta
Jika kondisi berikut dipenuhi:

1. *Fungsi tujuan $f(x_1, x_2)$ dapat didiferensialkan dan merupakan fungsi cekung.*
2. *Fungsi kendala $g(x_1, x_2)$ dapat didiferensialkan dan merupakan fungsi cembung.*
3. *Titik kritis (x_1^*, x_2^*) memenuhi syarat maksimum Kuhn-Tucker.*

Maka titik kritis (x_1^*, x_2^*) memberikan maksimum global $f(x_1, x_2)$.

Teorema 2 *(Chiang, 1984 : 224)*
Misalkan terdapat masalah optimisasi pemrograman nonlinier dengan kendala sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimumkan} & : f(x_1, x_2) \\ \textit{dengan kendala} & : g(x_1, x_2) \geq C \\ \textit{dan} & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

dengan C adalah suatu konstanta.
Jika kondisi berikut dipenuhi:

1. *Fungsi tujuan $f(x_1, x_2)$ dapat didiferensialkan dan merupakan fungsi cembung.*
2. *Fungsi kendala $g(x_1, x_2)$ dapat didiferensialkan dan merupakan fungsi cekung.*
3. *Titik kritis (x_1^*, x_2^*) memenuhi syarat minimum Kuhn-Tucker.*

Maka titik-titik kritis (x_1^*, x_2^*) memberikan minimum global $f(x_1, x_2)$.

D. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dapat diketahui langkah-langkah atau prosedur untuk menentukan titik optimum pada permasalahan optimisasi fungsi nonlinier dua variabel bebas dengan satu kendala pertidaksamaan menggunakan syarat Kuhn-Tucker.

1. Membentuk fungsi Lagrange.
2. Menentukan syarat Kuhn-Tucker
3. Menentukan titik optimum dengan syarat Kuhn-Tucker.
4. Menghitung nilai fungsi tujuan di titik optimum yang telah didapatkan.
5. Menyelidiki apakah fungsi tujuan dan fungsi kendala dari permasalahan optimisasi memenuhi kondisi kecukupan Kuhn-Tucker.

Jika permasalahan optimisasi memenuhi teorema kecukupan Khuhn-Tucker, maka syarat Kuhn-Tucker menjadi syarat cukup dan syarat perlu dalam menentukan nilai optimum dari fungsi nonlinier dua variabel bebas dengan satu kendala pertidaksamaan. Tetapi jika tidak memenuhi teorema kecukupan Khuhn-Tucker, maka syarat Kuhn-Tucker hanya menjadi syarat perlu dalam menentukan nilai optimum dari fungsi nonlinier dua variabel bebas dengan satu kendala pertidaksamaan.

E. Saran

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan fungsi yang akan dioptimumkan tidak dibatasi pada dua variabel bebas dengan satu kendala, tetapi dapat diperluas menjadi n variabel bebas dengan m kendala. Dengan demikian akan lebih banyak permasalahan yang dapat diselesaikan jika variabelnya diperluas menjadi n variabel dengan m kendala.

Daftar Pustaka

Budhi, Wono S. (2001). Kalkulus Variabel Banyak dan Penggunaannya. Bandung: ITB.

Chiang, Alpha C. (1984). Dasar-Dasar Matematika Ekonomi. Terjemahan oleh Susatio Sudigyo dan Nartanto. Jakarta: Erlangga.

Chiang, Alpha C. dan Kevin Wainwright. (2005). Dasar-Dasar Matematika Ekonomi. (Edisi ke-4). Terjemahan oleh Susatio Sudigyo dan Nartanto. Jakarta: Erlangga.

Luknanto, Djoko. (2000). Pengantar Optimasi Nonlinear. Diktat Kuliah Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Gajah Mada.

Purcell, E.J., Varberg, D., dan Rigdon, S.E.. (2004). Kalkulus Jilid 2 (Edisi ke-8). Terjemahan Julian Gressando. Jakarta: Erlangga

Stewart, James. (2003). Kalkulus (Edisi ke-5). Terjemahan Destha Pangastiwi. Jakarta: Salemba Teknik