

Pewarnaan Titik pada Graf Menggunakan Algoritma Baris dan Implementasinya dalam Matlab

¹Susi Meilani, ²Yurika Permanasari, ³Icih Sukarsih

^{1,2,3}Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung,
Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

e-mail : ¹susiwungkul@gmail.com, ²yurikakoe@gmail.com, ³icisukarsih@gmail.com,

Abstrak. Pewarnaan graf tidak hanya sekedar bagaimana mewarnai titik-titik yang ada pada suatu graf sehingga setiap titik yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama tetapi bagaimana melakukan pewarnaan sedemikian sehingga menghasilkan jumlah warna minimum yang disebut bilangan khromatik. Algoritma yang biasa digunakan untuk pewarnaan graf adalah Algoritma Welch-Powell. Algoritma Baris digunakan sebagai alternatif lain teknik pewarnaan graf memberikan hasil bilangan khromatik yang sama dengan Algoritma Welch-Powell. Algoritma Baris memiliki struktur yang lebih sederhana karena tidak memerlukan teknik sorting terlebih dahulu. Penggunaan Algoritma Baris pada graf yang mempunyai sisi ganda dan sisi gelang tidak mempengaruhi proses pewarnaan, karena untuk pewarnaan titik pada suatu graf yang dilihat adalah ketetanggaan dari setiap titik bukan berdasarkan derajat verteks.

Kata Kunci: Algoritma Baris, Pewarnaan Graf, Bilangan Kromatik.

A. Pendahuluan

Masalah pewarnaan graf pertama kali muncul pada tahun 1852 oleh seorang ahli matematika lulusan Universitas Perguruan Tinggi di London yang bernama Francis Guthrie. Francis Guthrie mengamati bahwa daerah Inggris dapat diwarnai dengan warna yang berbeda sedemikian sehingga daerah yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Pewarnaan graf tidak hanya sekedar bagaimana mewarnai titik-titik yang ada pada suatu graf sehingga setiap titik yang terkait (bertetangga) tidak memiliki warna yang sama tetapi bagaimana melakukan pewarnaan pada suatu graf sedemikian sehingga menghasilkan jumlah warna yang digunakan seminimum mungkin. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai titik pada suatu graf G disebut bilangan kromatik graf G , yang dilambangkan dengan $\chi(G)$.

Untuk melakukan pewarnaan dengan warna yang minimum maka diperlukan alat bantu, yaitu sebuah algoritma yang akan mengatur bagaimana proses pewarnaan pada suatu graf. Ada banyak algoritma yang digunakan untuk melakukan pewarnaan graf, diantaranya ada algoritma *Welch-Powell*, algoritma baris, dan sebagainya. Algoritma yang paling sering digunakan adalah algoritma *Welch-Powell* (Lipschutz,2002), namun untuk jumlah titik yang besar implementasi algoritma *Welch-Powell* dalam bentuk program akan lebih kompleks karena dalam prosesnya algoritma ini menggunakan teknik *sorting*. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas pewarnaan titik pada graf menggunakan algoritma baris, karena algoritma baris merupakan algoritma yang pengerjaannya sesuai urutan titik, dan tidak menggunakan proses *sorting*.

B. Landasan Teori

1. Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf terbagi menjadi dua macam yaitu pewarnaan titik dan pewarnaan sisi. Pewarnaan titik didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1. Jika g adalah tanpa lup, pewarnaan titik- k untuk G merupakan penunjukkan k warna pada titik G sedemikian hingga titik-titik yang adjasen

mendapat warna berbeda. Jika G memiliki pewarnaan- k , maka G dikatakan dapat diwarna- k (Wilson & Watkins, 1989, 235).

Adapun pewarnaan sisi adalah:

Definisi 2. Misal G adalah graf tanpa lup, pewarnaan sisi- k untuk G adalah pemberian k warna pada sisi-sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang bertemu dengan titik yang sama mendapat warna berbeda. Jika G memiliki warna berbeda. Jika G memiliki pewarnaan sisi- k , maka G dikatakan dapat diwarna sisi- k (Wilson & Watkins, 1989:240).

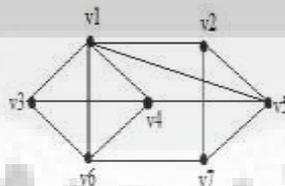
2. Algoritma Welch-Powell

Algoritma *Welch-Powell* dapat digunakan untuk mewarnai sebuah graf G . Langkah awal yang dilakukan dalam pewarnaan graf dengan algoritma *Welch-Powell* adalah dengan mengurutkan titik-titik di dalam graf berdasarkan derajat yang menurun. Yang dimaksud dengan derajat adalah banyaknya garis yang bersisian dengan titik. Selanjutnya warnai titik yang mempunyai derajat paling tinggi dengan warna pertama dan warnai juga titik-titik yang tidak bertetangga dengan warna yang sama seperti warna pertama, kemudian warnai titik yang mempunyai derajat tertinggi berikutnya dengan warna kedua.

Algoritma *Welch-Powell* adalah sebagai berikut:

1. Urutkan titik-titik dari G dalam derajat yang menurun (urutan seperti ini mungkin tidak unik karena beberapa titik mungkin berderajat sama).
2. Gunakan satu warna untuk mewarnai titik pertama (yang mempunyai derajat tertinggi) dan titik-titik lain (dalam urutan yang berurut) yang tidak bertetangga dengan titik pertama ini.
3. Mulai lagi dengan titik derajat tertinggi berikutnya di dalam daftar terurut yang belum diwarnai dan ulangi proses pewarnaan titik dengan menggunakan warna kedua.
4. Ulangi penambahan warna-warna sampai semua titik telah diwarnai.

Contoh penggunaan Algoritma *Welch-Powell* untuk mewarnai graf G yang ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf G

Titik	V1	V4	V5	V6	V2	V3	V7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	a	b	c	c	b	d	a

Jadi dengan menggunakan Algoritma *Welch-Powell* ada 4 warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G , sehingga $\chi(G) = 4$.

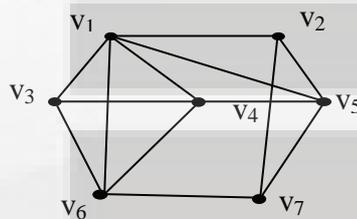
C. Hasil dan Pembahasan

1. Pewarnaan Titik Menggunakan Algoritma Baris

Berbeda dengan algoritma *Welch-Powell*, dalam pengerjaannya algoritma baris tidak perlu mengurutkan titik berdasarkan derajat tertingginya, melainkan dilakukan berdasarkan urutan titik pada suatu graf dan urutan titik pertama yang akan diwarnai bisa dipilih secara bebas. Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan titik pada graf G . Langkah pertama dipilih salah satu titik sebagai titik pertama yang akan diberi warna biasanya diawali dari titik v_1 (parameter $i = 1$).

Misalkan titik v_1 diwarnai dengan warna x , selanjutnya semua titik yang bertetangga dengan v_1 disusun dalam suatu himpunan dari indeks terkecil ke indeks terbesar, himpunan ini dinyatakan dengan L_1 . Untuk melanjutkan pewarnaan, dipilih titik v_2 kemudian titik-titik yang bertetangga dengan titik v_2 disusun dalam suatu himpunan L_2 dari indeks terkecil ke indeks terbesar. Jika dalam L_2 tidak muncul warna x maka titik v_2 diwarnai dengan warna x . Jika warna x muncul maka titik tersebut diwarnai dengan warna yang berbeda. Proses ini dilakukan berulang seterusnya sampai semua titik diwarnai.

1. Langkah ini untuk mengawali parameter i , digunakan untuk mewarnai titik $v_i, i=1$.
2. Langkah ini untuk mengawali titik i , warnai titik $v_i, c = 1$.
3. a. Susun titik yang bertetangga dengan v_i dengan indeks naik, susunan itu disebut L_i
4. b. Jika c tidak muncul dalam L_i , maka warnai titik v_i dengan c kemudian dilanjutkan ke langkah 5. Jika tidak maka dilanjutkan ke langkah 4.
5. Warna c dinaikan, $c = c + 1$ dan kembali ke langkah b.
6. Parameter i dinaikan. Jika $i < n$, maka $i = i + 1$ kemudian kembali ke langkah 1, jika tidak maka berhenti.



Gambar 3.2 Graf G dengan 7 verteks

Contoh penggunaan Algoritma Baris untuk mewarnai graf G yang ditunjukkan pada Gambar 2.

1. Pilih titik v_1
Warnai titik v_1 dengan warna $c =$ warna 1
 $L_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = v_1$ berwarna 1.
2. Pilih titik v_2
 $L_2 = \{v_1, v_5, v_7\}$ = karena dalam L_2 muncul v_1 berwarna 1 maka $c =$ warna 2 sehingga v_2 berwarna 2.
3. Pilih titik v_3
 $L_3 = \{v_1, v_4, v_6\}$ = karena dalam L_3 muncul v_1 berwarna 1 maka $c =$ warna 2 sehingga v_3 berwarna 2.
4. Pilih titik v_4
 $L_4 = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ = karena dalam L_4 muncul v_1 berwarna 1 dan v_3 berwarna 2 maka $c =$ warna 3 sehingga v_4 berwarna 3.
5. Pilih titik v_5
 $L_5 = \{v_1, v_2, v_4, v_7\}$ = karena dalam L_5 muncul v_1 berwarna 1, v_2 berwarna 2 dan v_4 berwarna 3 maka $c =$ warna 4 sehingga v_5 berwarna 4.
6. Pilih titik v_6
 $L_6 = \{v_1, v_3, v_4, v_7\}$ = karena dalam L_6 muncul v_1 berwarna 1, v_3 berwarna 2 dan v_4 berwarna 3 maka $c =$ warna 4 sehingga v_6 berwarna 4.
7. Pilih titik v_7

8. $L_7 = \{v_2, v_5, v_6\}$ = karena dalam L_7 muncul v_2 berwarna 2, v_5 berwarna 4 dan v_6 berwarna 4 maka warna titik kembali ke $c =$ warna 1 sehingga v_7 berwarna 1.

Jadi dengan menggunakan Algoritma Baris warna yang diperlukan untuk mewarnai graf pada Gambar 3.1 adalah 4 warna, sehingga $\chi(G) = 4$.

2. Implementasi Algoritma Baris dalam Program Matlab

Pewarnaan titik pada graf dengan jumlah verteks yang besar akan sangat sulit dilakukan secara manual. Oleh karena itu, implementasi Algoritma Baris dalam matlab sangat diperlukan untuk mempermudah proses pewarnaan titik pada suatu graf. Implementasi Algoritma Baris dalam program matlab adalah sebagai berikut :

```
n = length(v);
en = size(e);
c = zeros(1,n);
wv = zeros(1,n);

for i = 1:n
    c = 1;
    L = [];
    wL = [];
    k = 0;
    for j=1:en(2),
        if e(1,j) == v(i),
            k=k+1
            L(k) = e(2,j)
            wL(k) = wv(L(k))
        end;
    end;
    while (ismember(c,wL) == 1),
        c = c+1;
    end;
    wv(i) = c
    fprintf('warna verteks untuk verteks ke %2.0f adalah :%2.0g\n',i,wv(i));
end;
```

D. Kesimpulan

Pewarnaan titik menggunakan Algoritma Baris menghasilkan bilangan khromatik $\chi(G)$ yang menyatakan jumlah warna minimum untuk suatu graf. Dan penggunaan Algoritma Baris pada graf yang mempunyai sisi ganda dan sisi gelang tidak mempengaruhi proses pewarnaan, karena untuk pewarnaan titik pada suatu graf yang dilihat adalah ketetangaan dari setiap titik bukan berdasarkan derajat verteks.

Implementasi Algoritma Baris dengan menggunakan perogram MATLAB R2008a mempermudah proses pewarnaan pada suatu graf karena untuk kasus graf dengan jumlah verteks yang besar akan sulit jika dikerjakan secara manual. Program Algoritma Baris ini cukup sederhana dalam penggunaannya, untuk melakukan proses pewarnaan cukup dengan memasukan jumlah verteks dan jumlah edge dari suatu graf.

Daftar Pustaka

- Arhami, M. dan Desiani, A. (2005). *Pemrograman Matlab*. Yogyakarta : Andi
- Lipschutz, Seymour; Lipson, Marc Lars, 2002, *Matematika Diskrit jilid 2 Seri Penyelesaian Soal Schaum*, Salemba Teknika, Jakarta.
- Munir, Rinaldi., 2005, *Matematika Diskrit edisi Ketiga*, Informatika Bandung, Bandung.
- Noor, Rahmat Januar, Hasmawati dan Hendra., 2013, *Implementasi Algoritma Baris dalam Pewarnaan Titik pada Graf Sederhana*, Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Hasanudin, Makasar.
- Wilson, Robin J; Watkins, John J., 1989, *Graphs An Introductory Approach: a first course in discrete mathematics*.