Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Orde Satu Linier Menggunakan Transformasi Laplace yang Melibatkan Dua Fungsi Secara Simultan

Intan Setiasih*, Gani Gunawan, Onoy Rohaeni

Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.

*intaaan24@gmail.com, ggani9905@gmail.com, onoyrohaeni@gmail.com

Abstract. The system of differential equations is a system which contains *n* differential equations with *n* unknown functions and the differential equations are related to each other, where *n* is a positive number more than equal to two ($n \geq 2$). The system of linear differential equations which is formed from two equations and two homogeneous first-order constant coefficient variables is one type of system of differential equations whose cases exist in the real world and must have initial value requirements that must be solved, so it is necessary to find a solution and determine the conditions formed for fulfill certain goals. One of the methods that can be used is the Laplace transformation. By applying the rules and properties of the Laplace transformation, a auxiliary equation (equation in the *s* domain) is formed which consists of two fractional equations with a denominator in the form of a quadratic function so that there are three possible conditions for the quadratic function, namely linear and different form factors, repetitive and non-factorable factors. Each condition is formed by the terms of the quadratic function. By determining the four initial value conditions, the solution formed is twelve possible solutions.
Keywords: Normality Homogeneous Systems Of Linear Differential Equations, Laplace Transform, Inverse Laplace Transform.

Abstrak. Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang didalamnya memuat *n* buah persamaan diferensial dengan *n* buah fungsi yang tidak diketahui dan antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait, dimana *n* merupakan bilangan positif lebih dari sama dengan dua ($n \geq 2$). Sistem persamaan diferensial linier yang terbentuk dari dua persamaan dan dua variable koefisien konstan orde satu homogen adalah salah satu jenis sistem persamaan diferensial yang kasusnya ada di dunia nyata dan pasti memiliki syarat nilai awal yang harus diselesaikan, sehingga perlu dicari solusi dan menetapkan syarat yang terbentuk untuk memenuhi tujuan tertentu. Salah satu metode yang bisa digunakan adalah transformasi Laplace. Dengan menerapkan aturan dan sifat transformasi Laplace terbentuk persamaan pembantu (persamaan dalam domain *s*) yang terdiri dari dua persamaan pecahan dengan penyebut berbentuk fungsi kuadrat sehingga terjadi tiga kemungkinan kondisi fungsi kuadrat yaitu faktor bentuk linier dan berbeda, faktor berulang dan tidak bisa difaktorkan. Masing-masing kondisi faktor tersebut terbentuk syarat fungsi kuadrat. Dengan menetapkan empat kondisi nilai awal maka solusi yang terbentuk yaitu dua belas kemungkinan solusi.
Kata Kunci: Sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen, Transformasi Laplace, Invers Transformasi Laplace.

1. Pendahuluan

Pemodelan matematika atau pemodelan simbolik merupakan suatu pemodelan yang menggunakan simbol matematika dan logika untuk menyajikan permasalahan objek [1]. Salah satu bentuk model yang dirumuskan dari permasalahan yaitu Sistem Persamaan Diferensial (SPD), sistem yang di dalam nya memuat *n* buah persamaan diferensial dengan *n* buah fungsi yang tidak diketahui dan antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait, dimana *n* merupakan bilangan positif lebih dari sama dengan dua ($n \geq 2$) [2]. Ditinjau dari banyaknya peubah bebas yang dimiliki SPD dibedakan menjadi dua kategori, salah satu kategorinya adalah Sistem Persamaan Diferensial Biasa (SPDB), yaitu sebuah sistem yang didalamnya memuat persamaan-persamaan diferensial yang saling terkait dan variabel bebas yang dimilikinya tunggal. SPDB juga dapat ditinjau dari tingkat ordenya yaitu turunan tertinggi dari sistem. SPD orde satu linier homogen yang terbentuk dari dua persamaan dan dua variabel koefisien konstan adalah salah satu SPD yang kasusnya ada di dunia nyata.

Masalah yang sering muncul dalam permasalahan diferensial adalah bagaimana menemukan solusi eksak (analitik) dari model-model matematika yang diperoleh dari masalah dunia nyata [3], sehingga berbagai metode ditawarkan untuk penyelesaian sistem tersebut. Salah satu metode yang ditawarkan yaitu transformasi Laplace. Transformasi Laplace digunakan secara khusus untuk menyelesaikan permasalahan diferensial dengan menyederhanakan perhitungan suatu persamaan matematika yang mengandung operasi turunan/diferensial atau integral menjadi persamaan yang berisi perkalian atau pembagian biasa dan mengubah persamaan kalkulus menjadi persamaan aljabar biasa. Perubahan persamaan integral dan diferensial menjadi bentuk polinomial menyederhanakan proses penyelesaian. Perhitungan menggunakan transformasi Laplace dapat dilakukan secara langsung melalui penggunaan formula transformasi, dan dengan menggunakan bantuan tabel Tranformasi Laplace.

Proses transformasi Laplace pada SPD orde satu linier homogen yang terbentuk dari dua persamaan dan dua variabel koefisien konstan orde satu homogen menghasilkan dua persamaan pembantu $\boldsymbol{X_1(s)}$ dan $\boldsymbol{X_2(s)}$ berbentuk $\frac{\boldsymbol{Q}(s)}{\boldsymbol{P}(s)}$ dimana $\boldsymbol{P(s)}$ berbentuk persamaan kuadrat, sehingga memungkinkan terjadinya tiga kondisi berdasarkan bentuk faktornya yaitu faktor berbeda dan linier, faktor yang berulang dan tidak bisa difaktorkan. Selain itu kondisi nilai awal setiap permasalahan di dunia nyata berbeda, maka diberikan empat kemungkinan kondisi nilai awal, yaitu:

1. $x_1(0) = k_1$ dan $x_2(0) = 0$
2. $x_1(0) = 0$ dan $x_2(0) = k_2$
3. $x_1(0) = k_1$ dan $x_2(0) = k_2$
4. $x_1(0) = x_2(0) = k$

Dimana $k_1, k_2, k \in \mathcal{R} - \{0\}$

Berdasarkan latar belakang masalah, identifikasi masalah yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mencari solusi sistem persamaan diferensial linier orde satu dua persamaan dan dua variable homogen dengan transformasi Laplace menggunakan fraksi parsial?
2. Bagaimana solusi yang dihasilkan dari keempat kondisi nilai awal?
3. Bagaimana syarat terhadap tiga kondisi faktor penyebut persamaan pembantu dan kondisi-kondisi nilai awal terbentuk?

2. Landasan Teori

Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas [4]. Bentuk umum PDB adalah

$$\boldsymbol{f(t, x, x', x'', x''', \dots, x^{(n)}) = 0}$$

Dengan $\boldsymbol{x^{(n)}}$ merupakan turunan ke-*n* dari fungsi *x* terhadap *t*.

Adapun bentuk umum dari PDB orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\boldsymbol{f(t, x, x') = 0}$$

Dengan *t* adalah variabel bebas, sehingga $\boldsymbol{x = x(t)}$ dengan $\boldsymbol{x'}$ merupakan turunan pertama fungsi *x* terhadap *t*.

Sistem Persamaan Diferensial Linier

Sistem Persamaan Diferensial Linier (SPDL) adalah salah satu jenis sistem persamaan diferensial yang ditinjau berdasarkan kelinierannya. Suatu persamaan dikatakan linier jika tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas terhadap turunannya [3]. Bentuk umum SPDL homogen dengan dua persamaan dan dua variabel yaitu,

$$\boldsymbol{\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx_2}{dt} = cx_1 + dx_2}$$

Dengan *a, b, c, d* bernilai konstan, $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ adalah variabel bebas serta $\boldsymbol{\frac{dx_1}{dt}}$, $\boldsymbol{\frac{dx_2}{dt}}$ merupakan derivative fungsi $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ terhadap *t*.

Transformasi Laplace

Metode transformasi Laplace adalah sebuah metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan dan sistem persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah nilai awal.

Definisi 1. [5]

Misalkan *f* suatu fungsi dari *t* yang ditentukan untuk $t \geq 0$. Maka transformasi Laplace dari $f(t)$, yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{f(t)\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt$$

Teorema 1. [6]

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Teorema 2. [6]

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

Teorema 3. [6]

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

Adanya transformasi juga mengharuskan adanya invers. Beberapa nilai invers dari transformasi Laplace disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 1. Tabel Invers Transformasi Laplace

No.	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$	1
2	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
3	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
4	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, a \neq b$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$
5	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, a \neq b$	$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$
6	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cos bt$
7	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \sin at$

3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Model yang akan dirumuskan yaitu

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2 \\ x_2' &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Dimana a, b, c, d adalah fungsi terhadap t bernilai konstan dengan nilai awal yang diberikan adalah $x_1(0) = k_1$ dan $x_2(0) = k_2$ dengan $k_1, k_2 \in \mathcal{R} - \{0\}$.

Persamaan pembantu terbentuk dari hasil eleminasi dan substitusi sistem yang telah diterapkan aturan dan sifat transformasi Laplace.

1. Menerapkan aturan transformasi Laplace pada sistem (1) di kedua ruas persamaan.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_1'\} &= \mathcal{L}\{ax_1 + bx_2\} \\ \mathcal{L}\{x_2'\} &= \mathcal{L}\{cx_1 + dx_2\} \end{aligned}$$

2. Menerapkan teorema 1 (sifat linearitas) transformasi Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_1'\} &= a\mathcal{L}\{x_1\} + b\mathcal{L}\{x_2\} \\ \mathcal{L}\{x_2'\} &= c\mathcal{L}\{x_1\} + d\mathcal{L}\{x_2\} \end{aligned} \tag{2}$$

3. Menerapkan teorema 2 (transformasi Laplace dari turunan) pada sistem (2) dan melakukan substitusi nilai awal pada masing-masing persamaan.

$$\begin{aligned} sX_1(s) - x_1(0) &= aX_1(s) + bX_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) &= cX_1(s) + dX_2(s) \end{aligned}$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} (s-a)X_1(s) - bX_2(s) &= k_1 \\ (s-d)X_2(s) - cX_1(s) &= k_2 \end{aligned} \tag{3}$$

4. Proses eleminasi dan substitusi dilakukan pada sistem (3) untuk medapatkan persamaan pembantu, didapatkan

$$X_1(s) = \frac{sk_1 + (bk_2 - dk_1)}{s^2 + (-a-d)s + (ad - bc)}$$

$$X_2(s) = \frac{sk_2 + (ck_1 - ak_2)}{s^2 + (-a-d)s + (ad - bc)}$$

Penyebut dari kedua persamaan memiliki bentuk yang sama yaitu persamaan kuadrat sehingga memungkinkan terjadinya tiga kondisi bentuk faktor

1. Faktor yang berbeda dan linier

$$X_1(s) = \frac{sk_1 + (bk_2 - dk_1)}{(s+F_1)(s+F_2)} = \frac{A}{(s+F_1)} + \frac{B}{(s+F_2)}$$

$$X_2(s) = \frac{sk_2 + (ck_1 - ak_2)}{(s+F_1)(s+F_2)} = \frac{A}{(s+F_1)} + \frac{B}{(s+F_2)}$$

Dengan syarat yang terbentuk adalah

$F_1 + F_2 = (-a-d)$

$F_1F_2 \quad = (ad - bc)$

A dan $B =$ Konstanta

2. Faktor yang berulang

$$X_1(s) = \frac{sk_1 + (bk_2 - dk_1)}{(s+F)^2} = \frac{A}{(s+F)} + \frac{B}{(s+F)^2}$$

$$\boldsymbol{X_2(s) = \frac{sk_2 + (ck_1 - ak_2)}{(s+F)^2} = \frac{A}{(s+F)} + \frac{B}{(s+F)^2}}$$

3. Tidak bisa difaktorkan
   Untuk persamaan yang tidak bisa difaktorkan, penyelesaian kuadrat bisa diterapkan pada persamaan tersebut dengan bentuk penyebut menjadi
   $$s^2 + (-a-d)s + (ad - bc) \Leftrightarrow Ps^2 + Qs + R$$
   Sehingga persamaannya menjadi
   $$Ps^2 + Qs + R = (s+m)^2 + n^2$$
   Sehingga persamaan pembantu yang terbentuk adalah
   $$\boldsymbol{X_1(s) = \frac{sk_1 + (bk_2 - dk_1)}{(s+m)^2 + n^2} = \frac{As + B}{(s+m)^2 + n^2}}$$
   $$\boldsymbol{X_2(s) = \frac{sk_2 + (ck_1 - ak_2)}{(s+m)^2 + n^2} = \frac{As + B}{(s+m)^2 + n^2}}$$
   Dengan syarat yang terbentuk adalah
   $m = \frac{Q}{2} = \frac{(-a-d)}{2} = -\frac{(a+d)}{2}$

   $n = \frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2} = \frac{\sqrt{4(ad-bc)-(-a-d)^2}}{2}$

   Sehingga $4R \geq Q^2$.

Mendapatkan solusi dari masing-masing sistem transformasi Laplace berdasarkan bentuk faktor dengan melakukan substitusi keempat kondisi nilai awal menggunakan metode fraksi parsial dan *equate coefficient* serta menyelesaikannya dengan invers transformasi Laplace.

1. Kondisi nilai awal $\boldsymbol{x_1(0) = k_1}$ dan $\boldsymbol{x_2(0) = 0}$ dengan $\boldsymbol{k_1 \in \mathcal{R} - \{0\}}$
   1) Faktor yang berbeda dan linier
   $$\boldsymbol{x_1(t) = -\frac{k_1(F_1 + d)}{F_2 - F_1} e^{-F_1 t} + \frac{k_1(F_2 + d)}{F_2 - F_1} e^{-F_2 t}}$$
   $$\boldsymbol{x_2(t) = \frac{ck_1}{F_2 - F_1} e^{-F_1 t} - \frac{ck_1}{F_2 - F_1} e^{-F_2 t}}$$
   2) Faktor yang berulang
   $$\boldsymbol{x_1(t) = k_1 e^{-Ft} - k_1(d + F)te^{-Ft}}$$
   $$\boldsymbol{x_2(t) = ck_1 te^{-Ft}}$$
   3) Tidak bisa difaktorkan
   $$\boldsymbol{x_1(t) = k_1 e^{\frac{Q}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4R - Q^2}}{2} t + \sqrt{4R - Q^2}\, e^{\frac{Q}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4R - Q^2}}{2}}$$
   $$\boldsymbol{x_2(t) = \left(\frac{ck_1}{n}\right) e^{\frac{Q}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4R - Q^2}}{2} t}$$

2. Kondisi nilai awal $\boldsymbol{x_1(0) = 0}$ dan $\boldsymbol{x_2(0) = k_2}$ dengan $\boldsymbol{k_2 \in \mathcal{R} - \{0\}}$
   1) Faktor yang berbeda dan linier
   $$\boldsymbol{x_1(t) = \frac{bk_2}{F_2 - F_1} e^{-F_1 t} - \frac{bk_2}{F_2 - F_1} e^{-F_2 t}}$$
   $$\boldsymbol{x_2(t) = -\frac{(k_2 F_1 + ak_2)}{F_2 - F_1} e^{-F_1 t} + \frac{(k_2 F_1 + ak_2)}{F_2 - F_1} e^{-F_2 t}} \qquad (4)$$

2) Faktor yang berulang

$$\boldsymbol{x_1(t) = bk_2te^{-Ft}}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = k_2e^{-Ft} - k_2(a+F)te^{-Ft}}$$

3) Tidak bisa difaktorkan

$$\boldsymbol{x_1(t) = \left(\frac{bk_2}{n}\right)e^{\frac{Q}{2}t}\,sin\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}t}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = k_2e^{\frac{Q}{2}t}\,cos\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}t + \sqrt{4R-Q^2}\,e^{\frac{Q}{2}t}\,sin\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}}$$

3. Kondisi nilai awal $\boldsymbol{x_1(0) = k_1}$dan $\boldsymbol{x_2(0) = k_2}$ dengan $\boldsymbol{k_1, k_2} \in \boldsymbol{\mathcal{R}} - \{\boldsymbol{0}\}$
   1) Faktor yang berbeda dan linier

$$\boldsymbol{x_1(t) = -\frac{k_1(\,F_1+d)+bk_2}{F_2-F_1}e^{-F_1t} + \frac{k_1(\,F_2+d)-bk_2}{F_2-F_1}e^{-F_2t}}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = -\frac{k_2(F_1-a)+ck_1}{F_2-F_1}e^{-F_1t} + \frac{k_2(F_1-a)-ck_1}{F_2-F_1}e^{-F_2t}}$$

   2) Faktor yang berulang

$$\boldsymbol{x_1(t) = k_1e^{-Ft} - [(dk_1+Fk_1)-bk_2]te^{-Ft}}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = k_2e^{-Ft} + (ck_1-k_2F)te^{-Ft}}$$

   3) Tidak bisa difaktorkan

$$\boldsymbol{x_1(t) = k_1e^{\frac{Q}{2}t}\,cos\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}t + \sqrt{4R-Q^2}\,e^{\frac{Q}{2}t}\,sin\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = k_2e^{\frac{Q}{2}t}\,cos\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}t + \sqrt{4R-Q^2}\,e^{\frac{Q}{2}t}\,sin\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}}$$

4. Kondisi nilai awal $\boldsymbol{x_1(0) = x_2(0) = k}$ dengan $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{\mathcal{R}} - \{\boldsymbol{0}\}$
   1) Faktor yang berbeda dan linier

$$\boldsymbol{x_1(t) = \frac{k(b-d-F_1)}{F_2-F_1}e^{-F_1t} - \frac{k(b-d-F_2)}{F_2-F_1}e^{-F_2t}}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = -\frac{k(F_1-c+a)}{F_2-F_1}e^{-F_1t} + \frac{k(F_2-c+a)}{F_2-F_1}e^{-F_2t}}$$

   2) Faktor yang berulang

$$\boldsymbol{x_1(t) = ke^{-Ft} + k(b-d-F)te^{-Ft}}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = ke^{-Ft} + k(c-a-F)te^{-Ft}}$$

   3) Tidak bisa difaktorkan

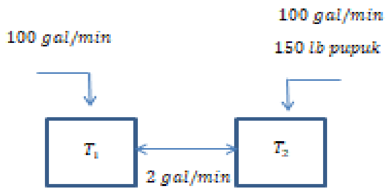
$$\boldsymbol{x_1(t) = ke^{\frac{Q}{2}t}\,cos\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}t + \sqrt{4R-Q^2}\,e^{\frac{Q}{2}t}\,sin\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = ke^{\frac{Q}{2}t}\,cos\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}t + \sqrt{4R-Q^2}\,e^{\frac{Q}{2}t}\,sin\frac{\sqrt{4R-Q^2}}{2}}$$

Aplikasi Transformasi Laplace

Diketahui dua buah tangki air $\boldsymbol{T_1}$ dan $\boldsymbol{T_2}$. Pada awalnya tangki $\boldsymbol{T_1}$ memuat $\boldsymbol{100}$ galon air murni dan tangki $\boldsymbol{T_2}$ memuat $\boldsymbol{100}$ galon air dengan $\boldsymbol{150}$ lb pupuk yang dilarutkan ke dalamnya. Larutan tersebut mengalir melalui tangki-tangki pada kecepatan konstan, yaitu $\boldsymbol{2}$ gal/min, dan larutan tersebut dijaga keseragamannya dengan cara mengaduknya. Jika $\boldsymbol{x_1(t)}$ dan $\boldsymbol{x_2(t)}$ menyatakan banyaknya pupuk dalam tangki $\boldsymbol{T_1}$ dan $\boldsymbol{T_2}$, maka kecepatan perubahan $\boldsymbol{x_1'(t)}$ dari $\boldsymbol{x_1(t)}$ sama dengan aliran yang masuk ke tangki ($\boldsymbol{inflow}$) per menit dikurangi aliran yang keluar dari tangki ($\boldsymbol{outflow}$) per menit. Demikian juga dengan $\boldsymbol{x_2'(t)}$ dari $\boldsymbol{x_2(t)}$. Tentukan banyaknya pupuk $\boldsymbol{x_1(t)}$ dan $\boldsymbol{x_2(t)}$ dalam tangki $\boldsymbol{T_1}$ dan $\boldsymbol{T_2}$ tersebut pada saat *t*.

Penyelesaian:

Persoalan diatas dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 1. Ilustrasi Tangki Air

Model matematika yang terbentuk adalah

$$\mathbf{x_1'(t) = -0,02x_1 + 0,02x_2}$$
$$\mathbf{x_2'(t) = 0,02x_1 - 0,02x_2}$$

Dengan syarat awal yang telah diberikan yaitu $\boldsymbol{x_1(0) = 0}$ dan $\boldsymbol{x_2(0) = 150}$. Sistem tangki air tersebut memiliki persamaan pembantu dengan penyebut berbentuk persamaan kuadrat dengan faktor yang berbeda dan linier yaitu $\boldsymbol{F_1 = 0}$ dan $\boldsymbol{F_2 = 0,04}$, sehingga memenuhi solusi pada persamaan (4). Sehingga solusi dari tangki air tersebut adalah:

$$\boldsymbol{x_1(t) = 75 - 75e^{-0,04t}}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = 75 + 75e^{-0,04t}}$$

4. Kesimpulan

Proses transformasi Laplace dari sistem yang dirumuskan mendapatkan persamaan pembantu $\boldsymbol{X_1(s)}$ dan $\boldsymbol{X_2(s)}$ berbentuk $\boldsymbol{\frac{Q(s)}{P(s)}}$ dimana $\boldsymbol{P(s)}$ memiliki bentuk yang sama yaitu bentuk fungsi kuadrat sehingga perlu adanya manipulasi penyebut. Masing-masing dari penyebut yang telah dianalisis dengan manipulasi penyebut telah memenuhi solusi laplace dari table transformasi Laplace, yaitu:

1. Solusi dari faktor berbeda dan linier

$$\boldsymbol{A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+F_1)}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+F_2)}\right\} = Ae^{-F_1t} + Be^{-F_2t}}$$

   Dengan syarat $\boldsymbol{F_1 + F_2 = (-a-d)}$ dan $\boldsymbol{F_1F_2 = ad - bc}$

2. Solusi dari faktor berulang

$$\boldsymbol{A\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{(s+F)}\right)\right\} + B\left\{\left(\frac{1}{(s+F)^2}\right)\right\} = Ae^{-F_1t} + Bte^{-F_2t}}$$

   Dengan syarat $\boldsymbol{F = 2(-a-d) = (ad-bc)^2}$

3. Solusi dari penyebut yang tidak bisa difaktorkan

$$\boldsymbol{A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+m)}{(s+m)^2+n^2}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n}{(s+m)^2+(n)^2}\right\}}$$
$$\boldsymbol{= Ae^{mt}\cos\mathrm{nt} + \sqrt{4\mathrm{R}-\mathrm{Q}^2}\,\mathrm{e^{mt}}\,sin\,nt}$$

   Dengan syarat $\mathbf{4R \geq Q^2}$.

   Konstanta A dan B didapatkan dari hasil eleminasi dan substitusi koefisien sistem dan empat kondisi nilai awal. Banyaknya solusi dari tiga kondisi faktor penyebut persamaan pembantu dan penetapan empat kondisi nilai awal berjumlah dua belas kemungkinan solusi.

5. Saran

Berdasarkan pembahasan yang didapat dari hasil penelitian mengenai penyelesaian sistem persamaan diferensial orde satu linier menggunakan transformasi Laplace yang melibatkan dua fungsi secara simultan, maka penulis bermaksud memberikan saran bagi peneliti selanjutnya yaitu untuk merumuskan sistem persamaan diferensial linier dengan orde yang lebih tinggi.

Daftar Pustaka

[1] Susanta, B. (2008). *Cara Mudah Menyelesaikan Matematika dengan Mathematica*. Yogyakarta: Universitas Terbuka.
[2] Finizo, & Ladaz. (1998). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga
[3] Waluya, S.B. (2006). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
[4] Pamuntjak & Santosa. (1990). *Persamaan Diferensial Biasa,* fakultas MIPA. Bandung: Institut Teknologi Bandung..
[5] Schiff, J. (1999). *The Laplace Trasnsform: Theory and Applications*. New York: Springer-Verlag.
[6] Spiegel, M. (1999). *Transformasi Laplace*. Jakarta: Erlangga