Menghitung Luas suatu Permukaan di R3 Menggunakan Aproksimasi Bidang Singgung dan Norm *Cross Product*

Calculating the Area of a Surface at R3 Using the Approach of the Tangent Field and Norm Cross Product

[1]Ain Nurul Fadilah, [2]Gani Gunawan, [3]Icih Sukarsih

[1,2,3]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

email: [1]ainfadilah4@gmail.com, [2]ggani9905@gmail.com, [3]sukarsh@yahoo.co.id

Abstract. In this paper Cross Product is the multiplication of two vectors at a three-dimensional space that produced vector. In the cross product there is a proposition that says that The Norm Cross Product is the same as the parallelogram area. From this proposition, Norm Cross Product can developed to calculate the surface area at three-dimensional space through the concept of Riemann Sum. The Riemann Sum concept for calculating the surface area of a partition can be formed in the form of rectangles as many as n partitions, so the interval of each partition is formed very small. Each arbitrary point on the surface of the plane is projected onto a partition at resolution. The point is projected as a coordinate point that is touched on by the tangent plane. The area of the tangent formed can be calculated using the Norm of the cross product. The area on the surface of the plane is an agreement of the area of tangent.

Keywords: Surface Area, Norm Cross Product, Tangent Field, Riemann Sum, Best Approximation

Abstrak. Dalam hal ini hasil kali silang (*cross product*) adalah perkalian dua buah vektor pada ruang dimensi tiga yang menghasilkan vektor. Pada hasil kali silang terdapat sebuah dalil yang mengatakan bahwa Norm hasil kali silang adalah sama dengan luas jajaran genjang. Dari dalil ini, Norm hasil kali silang dapat dikembangkan untuk menghitung luas suatu permukaan pada ruang dimensi tiga melalui konsep jumlah Riemann. Konsep jumlah Riemann untuk menghitung luas permukaan bidang dapat dibentuk partisi-partisi berupa persegi panjang-persegi panjang sebanyak n partisi, sehingga interval setiap partisi yang terbentuk sangat kecil. Setiap titik sembarang pada permukaan bidang diproyeksikan secara ortogonal terhadap partisi pada daerah definisi. Titik yang diproyeksikan tersebut merupakan koordinat titik singgung yang disinggung oleh bidang singgung. Luas bidang singgung yang terbentuk dapat dihitung dengan menggunakan Norm hasil kali silang. Luas pada permukaan bidang merupakan aproksimasi dari luas bidang singgung.

Kata Kunci: Luas Permukaan, Norm *Cross Product*, Bidang Singgung, Jumlah Riemann, Aproksimasi Terbaik.

A. Pendahuluan

Vektor secara geometrik dapat dinyatakan sebagai ruas garis berarah yang dapat digambarkan pada ruang dimensi dua atau ruang dimensi tiga. Dalam vektor ada perkalian dua buah vektor yang menghasilkan vektor yaitu hasil kali silang. Hasil kali silang dalam ruang dimensi- n bersifat tertutup karena jika terdapat $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ yang berada pada ruang dimensi-n maka $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ pastilah berada pada ruang dimensi yang sama. Oleh karena itu, ketika $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ dikembangkan pada ruang dimensi tiga maka panjang hasil kali silangnya pun akan berada pada dimensi yang sama.

Panjang hasil kali silang $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ adalah sama dengan luas jajaran genjang yang ditentukan oleh $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ (Stewart, 2011). Luas jajaran genjang merupakan bidang datar yang berada pada ruang dimensi dua, dari ruang dimensi dua inilah panjang hasil kali silang akan dikembangkan untuk menghitung luas suatu permukaan pada ruang dimensi tiga melalui konsep jumlah Riemann. Konsep jumlah Riemann membentuk partisi-partisi berupa persegi panjang-persegi panjang sebanyak n partisi, sehingga interval setiap partisi sangat kecil $(n \to \infty)$. Setiap titik sembarang pada permukaan bidang diproyeksikan secara ortogonal terhadap partisi pada daerah definisi. Titik yang diproyeksikan tersebut merupakan koordinat titik singgung yang disinggung oleh bidang singgung. Bidang singgung yang terbentuk membentuk jajaran genjang. Sehingga untuk menghitung luas permukaan bidang dapat diaproksimasi dengan menggunakan rumus Norm hasil kali silang.

B. Landasan Teori

Dalam landasan teori ini ada beberapa teorema dan definisi yang mendukung pembahasan untuk menghitung luas suatu permukaan pada dimensi tiga, diantaranya:

Teorema 1:
Jika θ adalah sdut tak-negatif terkecil diantara dua vektor tak-nol $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$, maka $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$. (Varberg D. E., 2011)

Teorema 2:
Dua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah saling tegak lurus jika dan hanya jika hasil kali titiknya $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ adalah 0. (Varberg D. E., 2011)

Teorema 3:
Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{a}$ adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi dua atau ruang berdimensi tiga dan jika $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, maka

$$Proj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{u} - Proj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$$

(Anton, 2004)

Teorema 4:
Misalkan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ vektor-vektor di ruang-tiga dan θ adalah sudut di antara kedua vektor tersebut, maka:

1. $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ *yakni $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ tegak lurus terhadap $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.*
2. *$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, dan $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ membentuk suatu rangkap tiga tangan kanan (right-handed triple).*
3. $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \sin\theta$

Teorema 5:
Panjang hasil kali silang $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah sama dengan luas jajaran genjang yang ditentukan oleh $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$. (Stewart, 2011)

Teorema 6:
Untuk permukaan $F(x,y,z) = k$, persamaan bidang singgung di (x_0, y_0, z_0) adalah

$$\nabla\boldsymbol{F}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

yaitu

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Secara khusus, untuk suatu permukaan $z = f(x,y)$, persamaan bidang singgung di $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ adalah

$$z - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

(Varberg D. E., 2011)

Teorema 7:
Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor-vektor di dalam sebuah ruang hasil kali dalam real, maka $|\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$. (Anton, 2004)

Teorema 8:
Jika W adalah sebuah subruang berdimensi terhingga dari suatu ruang hasil kali dalam V, dan jika $\boldsymbol{u}$ adalah sebuah vektor pada V, maka $proj_W\boldsymbol{u}$ adalah aproksimasi terbaik (best approximation) bagi $\boldsymbol{u}$ pada W, dalam pengertian bahwa

$$\|\boldsymbol{u} - proj_W\boldsymbol{u}\| < \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\|$$

untuk setiap vektor $\boldsymbol{w}$ pada W yang bukan $proj_W\boldsymbol{u}$. (Anton, 2004)

Definisi 1:
Jika diberikan suatu fungsi terbatas $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ dan partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ pada $[a,b]$. Jumlah Riemann atas dan jumlah Riemann bawah dari fungsi f sehubungan dengan partisi P didefinisikan dengan:

$$U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

$$L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1})$$

(Pirade S. M., 2017)

Definisi 2:

Misal suatu fungsi dua peubah bebas $z = f(x,y)$ terdefinisi pada daerah bidang tertutup R, Jika

$$\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\,(x_k, y_k)\Delta A_k$$

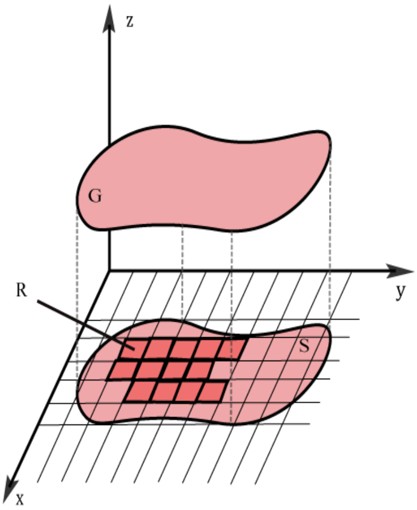
ada, untuk $\|P\| = maks\ \Delta A_k$ dengan $k = 1,2,..,n$ maka f terintegralkan pada R. Lebih lanjut, $\iint_R\ f(x,y)dA$ yang disebut integral lipat dua pada R diberikan oleh

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\,(x_k, y_k)\Delta A_k$$

(Gunawan G. d., 2015)

C. Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas terkait bagaimana Norm hasil kali silang dapat digunakan untuk menghitung luas suatu permukaan dalam ruang dimensi tiga. Misalkan permukaan $z = f(x,y)$, f mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu terhadap sumbu- x dan sumbu- y dinotasikan dengan f_x dan f_y.

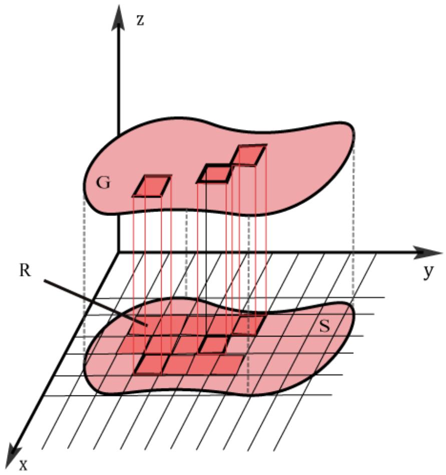


Gambar 1. Permukaan Bidang

Misalkan terdapat suatu permukaan G dengan persamaan fungsi $z = f(x,y)$ dan misalkan S adalah daerah asal dari permukaan G seperti pada Gambar 1, dengan menggunakan konsep Jumlah Riemann, daerah asal dari permukaan S dapat dibentuk partisi-partisi berupa persegi panjang-persegi panjang yang dinotasikan dengan R,

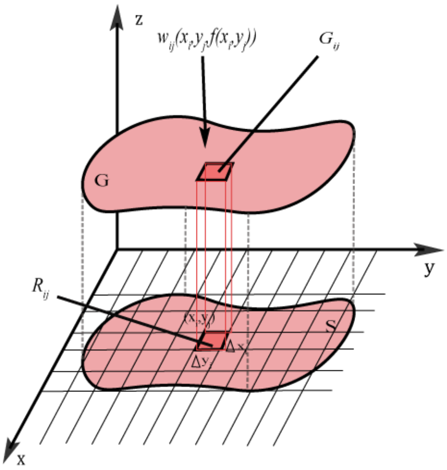
$$R = \{(x,y)|a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Partisi pada Daerah *R*

Misalkan R_{ij} adalah partisi sembarang yang merupakan sub partisi pada R (Gambar 3) dengan $i = 1,2,\ldots,n$ dan $j = 1,2,\ldots,m$, dalam hal ini $\Delta\ x = \frac{b-a}{n}$ dan $\Delta\ y = \frac{d-c}{m}$.



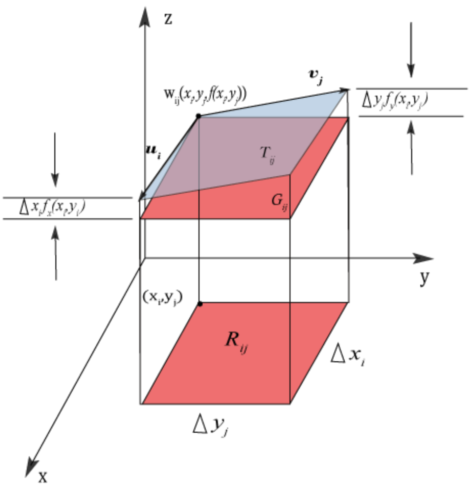
Gambar 3. Partisi R_{ij}

Misalkan G_{ij} adalah sub permukaan pada G, dengan memandang koordinat titik $w_{ij}\left(x_i, y_j, f(x_i, y_j)\right)$ pada G_{ij} yang diproyeksikan secara ortogonal terhadap titik yang termuat pada R_{ij} di S. Sedemikian sehingga, ada titik (x_i, y_j) pada R_{ij} yang merupakan proyeksi dari $w_{ij}\left(x_i, y_j, f(x_i, y_j)\right)$ pada G_{ij}. Oleh karena itu, untuk mendapatkan luas permukaannya maka setiap partisi akan diaproksimasi dengan luas bidang singgung yang menyinggung w_{ij}, dan dinotasikan dengan T_{ij}. Sehingga aproksimasi dari luas permukaan G dapat dihitung dengan persamaan (1).

$$A(G) \approx \sum_{\substack{1\le i \le n \\ 1\le j\le m}} A(T_{ij}) \tag{1}$$

untuk aproksimasi persamaan (1) agar nilainya semakin mendekati nilai yang sesungguhnya maka panjang partisi R dinyatakan dengan $\|R\|$ haruslah semakin kecil agar galat yang dihasilkan semakin mengecil mendekati nol, sehingga $\|R\| \to 0$ $\left((n,m) \to \infty\right)$ dapat dinyatakan dengan persamaan (2).

$$A(G) = \lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{\substack{1\le i \le n \\ 1\le j\le m}} A(T_{ij}) \tag{2}$$



Gambar 4. Rincian Sub Partisi R_{ij}

Dalam Gambar 3 dibuat lebih terinci seperti pada Gambar 4. Misalkan terdapat $\boldsymbol{u_i}$ dan $\boldsymbol{v_j}$ yang merupakan vektor-vektor pada permukaan di daerah T_{ij}, dengan vektor $\boldsymbol{u_i}$ yang mengarah pada sumbu-x dan vektor $\boldsymbol{v_j}$ yang mengarah pada sumbu-y. Daerah T_{ij} merupakan bidang singgung pada daerah G_{ij} yang membentuk jajaran genjang, sedemikian sehingga untuk menghitung luas bidang singgung daerah T_{ij} dapat menggunakan Teorema 4 bagian 3

$$A(G) = \lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left\|\boldsymbol{u_i} \times \boldsymbol{v_j}\right\| \tag{3}$$

untuk menghitung $\left\|\boldsymbol{u_i} \times \boldsymbol{v_j}\right\|$ harus dicari terlebih dahulu elemen-elemen yang termuat pada vektor $\boldsymbol{u_i}$ dan $\boldsymbol{v_j}$ dengan menggunakan Teorema 6 Bidang Singgung

$$z - f(x_i, y_j) = f_x(x_i, y_j)(x - x_i) + f_y(x_i, y_j)(y - y_j) \tag{4}$$

Sedemikian sehingga, diperoleh elemen-elemen dari vektor $\boldsymbol{u_i}$ dan $\boldsymbol{v_j}$ adalah

$$\boldsymbol{u_i} = \left(\Delta x_i, 0, f_x(x_i, y_j)\Delta x_i\right)$$

dan

$$\boldsymbol{v_j} = \left(0, \Delta y_j, f_y(x_i, y_j)\Delta y_j\right)$$

Setelah diketahui elemen dari vektor $\boldsymbol{u_i}$ dan vektor $\boldsymbol{v_j}$, maka untuk menghitung luas T_{ij} adalah

$$A(T_{ij}) = \|\boldsymbol{u_i}\|\|\boldsymbol{v_j}\|\sin\theta = \|\boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{v}_j\|$$

dengan θ merupakan sudut diantara vektor $\boldsymbol{u_i}$ dan vektor $\boldsymbol{v_j}$

$$\boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{v}_j = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \Delta x_i & 0 & f_x(x_i, y_j)\Delta x_i \\ 0 & \Delta y_j & f_y(x_i, y_j)\Delta y_j \end{vmatrix}$$

karena itu luas T_{ij} adalah

$$A(T_{ij}) = \|\boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{v}_j\|$$

$$A(T_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \tag{5}$$

Substitusikan Persamaan (5) terhadap Persamaan (3), sehingga luas daerah G diperoleh

$$\lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{\substack{1\le i \le n \\ 1\le j\le m}} \Delta x_i \Delta y_j \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \tag{6}$$

D. Kesimpulan

Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan vektor yang termuat pada bidang singgung yang menyinggung pada permukaan $f(x,y)$ di titik $w_{ij}\left(x_i, y_j, f(x_i, y_j)\right)$ pada G_{ij}. Sedemikian sehingga,

$$\boldsymbol{u_i} = \left(\Delta x_i, 0, f_x(x_i, y_j)\Delta x_i\right)$$

dan

$$\boldsymbol{v_j} = \left(0, \Delta y_j, f_y(x_i, y_j)\Delta y_j\right)$$

Maka luas permukaan G atau $A(G)$ dapat diaproksimasi dengan bidang singgung $A(T_{ij})$ dan dinyatakan oleh

$$A(G) = \lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} A(T_{ij}) = \lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \|\boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{v}_j\|$$

E. Saran

Banyaknya masalah luas permukaan disebabkan beragamnya bentuk fungsi untuk setiap permukaan bidang. Pada saat menghitung luas permukaan menggunakan Norm hasil kali silang seperti pada persamaan (6), ketika fungsi sulit untuk diturunkan maka persamaan (6) terkedala saat proses perhitungannya sehingga perlu dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai luas permukaan.

Daftar Pustaka

Anton, H. d. (2004). Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi edisi Kedelapan Jilid 1. In *Aproksimasi Terbaik; Kuadrat Terkecil* (p. 353). Erlangga: Jakarta.

Anton, H. d. (2004). Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1. In H. K. Silang. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. d. (2004). Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1. In *Proyeksi Ortogonal* (p. 149). Jakarta: Erlangga.

Anton, H. d. (2004). Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1. In *Sudut dan Ortogonal di Dalam Ruang Hasil Kali Dalam* (p. 323). Jakarta: Erlangga.

Gunawan, G. d. (2015). kalkulus Peubah Banyak. In *Integral Lipat* (p. 77). Yogyakarta: Graha Ilmu.

Pirade, S. M. (2017). Integral Riemann-Stieltjes Pada Fungsi Bernilai Real. *JdC, Vol. 6, No. 1*, 3-4.

Pirade, S. M. (2017). Integral Riemann-Stieltjes Pada Fungsi Bernilai Real. *JdC, Vol. 6, No. 1, 6*, 3-4.

Stewart, J. (2011). Kalkulus Jilid 3 Edisi 5. Jakarta: Salemba Teknika.

Stewart, J. (2011). Kalkulus Jilid 3 Edisi 5. In *Kalkulus Jilid 3 Edisi 5* (p. 50). Jakarta: Salemba Teknika.

Varberg, D. E. (2011). Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2. In *Hasil Kali Titik* (p. 185). Jakarta: Erlangga.

Varberg, D. E. (2011). Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2. In *Hasil Kali Titik* (p. 185). Jakarta: Erlangga.

Varberg, D. E. (2011). Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2. In *Bidang Singgung dan Aproksimasi* (p. 271). Jakarta: Erlangga.