Solusi Persamaan Diferensial Orde Dua Homogen dengan Koefisien Fungsi

Solution To Homogeneous Second-Order Differential Equations With Function Coefficients

[1]Nellvy Apriliajasni, [2]Gani Gunawan, [3]Yani Ramdani

[1,2,3]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No.1 Bandung 40116

email: [1]nellvyaprilia@yahoo.co.id, [2] ggani9905@gmail.com , [3]yaniramdani66@gmail.com

Abstract. In second-order differential equations, there are two homogeneous, namely differential equations, second-order, homogeneous with constant coefficients, and differential equations, second-order, homogeneous with function coefficients. The differential equation has different completion methods so that for a second-order differential equation it is homogeneous with a change coefficient using to determine the solution by the power series method. This power series method will produce a solution that polynomial sequence. The solution to the problem of the power series according to the theorem in the form of a power series in which the power series forms superposition. The completion of this power series at two-point, namely ordinary point with the functions that are analytic at the ordinary point will produce a recurrence formula and regular singular points with functions that are analytic and have an indicial equation that is quadratic equations.

Keywords: Homogeneous Second-Order Differential Equations with Function Coefficients, Power Series Methods

Abstrak. Dalam persamaan diferensial orde dua homogen terdapat dua koefisien yaitu persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien konstan dan persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien fungsi. Persamaan diferensial tersebut mempunyai metode penyelesaiannya yang berbeda, sehingga untuk persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien fungsi menggunakan penyelesaian untuk menentukan solusi dengan metode deret pangkat. Metode deret pangkat ini akan menghasilkan solusi yang berbentuk deret pangkat atau polinom. Solusi dari penyelesaian deret pangkat menurut teorema adalah berbentuk deret pangkat yang dimana deret pangkat tersebut membentuk superposisi. Penyelesaian deret pangkat ini terdapat di dua titik yaitu titik biasa dengan fungsi yang analitik pada titik biasa akan menghasilkan reccurence formula dan titik singular regular dengan fungsi yang analitik dan mempunyai persamaan indisial yang merupakan persamaan kuadrat.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Orde Dua Homogen dengan Koefisien Fungsi, Metode Deret Pangkat

A. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara variabel bebas, variabel tak bebas dan turunannya. Persamaan diferensial dibedakan berdasarkan variabel yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Orde dalam persamaan diferensial dibagi menjadi persamaan diferensial orde satu, persamaan diferensial orde dua sampai persamaan diferensial orde ke-n. Persamaan diferensial orde dua mempunyai bentuk

$$\boldsymbol{b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)}$$

yang mempunyai koefisien fungsi jika $b_2(x)$, $b_1(x)$, dan $b_0(x)$ tidak semuanya konstan dan jika $g(x) = 0$ maka bentuk persamaan diferensial disebut persamaan diferensial orde dua homogeny dengan koefisien fungsi. Jika $b_2(x) \neq 0$ pada interval yang diberikan, maka dapat membagi persamaan diferensial dengan $b_2(x)$ sehingga mempunyai bentuk baku

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Boyce dan DiPrima (2001) menyatakan bahwa metode deret pangkat untuk membangun penyeleseian fundamental solusi persamaan diferensial orde dua homogen koefisien fungsi dan berasumsi bahwa solusi dari persamaan diferensial yang diberikan memiliki ekspasi deret pangkat untuk menentukan koefisien sehingga dapat memenuhi persamaan diferensial.

Menyelesaian persamaan diferensial koefisien fungsi dengan menggunakan metode deret pangkat dan dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde dua homogen koefisien fungsi dengan menyatakan penyelesaian persamaan diferensial dalam bentuk deret pangkat. Penyelesaian persamaan diferensial ini akan berbentuk deret atau polinom.

Dalam penyelesaian deret pangkat mempunyai dua titik yaitu titik biasa dan titik singular. Dengan banyaknya jenis persamaan diferensial dengan berbagai penyelesaian dan solusi yang didapat maka perlu dibahas dan dipelajari penyelesaian persamaan diferensial orde dua koefisien fungsi menggunakan metode deret pangkat.

B. Landasan Teori

Metode deret pangkat suatu deret pangkat adalah deret dengan bentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Dengan $\boldsymbol{x}$ adalah suatu variabel bilangan dan $\boldsymbol{a_n}$ adalah konstanta-konstanta yang disebut koefisien deret.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_1 + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots}.$$

Disebut deret pangkat dalam $(x - x_0)$. Dengan a_0, a_1, dan a_2 adalah koefisien-koefisien konstan dari deret pangkat, x_0 adalah suatu konstanta yang disebut pusat dari deret dan x adalah peubah dan mempunyai radius konvergensi atau jari-jari kekovergensian yang dinyatakan oleh R.

Jika $R > 0$, maka deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergen untuk selang $|x - x_0| < R$ dan akan divergen untuk selang $|x - x_0| > R$.

Keanalitikan Fungsi $f(x)$ dikatakan analitik pada titik x_0, jika dapat dinyatakan oleh deret pangkat $(x - x_0)$ dengan jari-jari konvergensi positif atau kovergen.

Titik biasa

Definisi Sebuah titik x_0 disebut titik biasa dari persamaan diferensial $b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0$ jika kedua fungsi

$$\frac{b_1(x)}{b_2(x)} \text{ dan } \frac{b_0(x)}{b_2(x)}$$

Analitik pada titik x_0.

Titik singular regular

Definisi Sebuah titik x_0 disebut titik singular yang regular dari persamaan diferensial
$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0$ jika kedua fungsi

$$(x - x_0)\frac{b_1(x)}{b_2(x)} \; dan \; (x - x_0)^2\frac{b_0(x)}{b_2(x)}$$

Analitik pada x_0.

Solusi penyelesaian deret pangkat

Teorema Jika $\boldsymbol{x_0}$ merupakan titik biasa dari persamaan diferensial $\boldsymbol{b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0}$,

Jika $P(x) = \frac{b_1(x)}{b_2(x)}$ dan $Q(x) = \frac{b_0(x)}{b_2(x)}$ analitik di titik x_0, maka mempunyai bentuk solusi umum

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0y_1(x) + a_1y_2(x)$$

di mana a_1 dan a_0 adalah arbitrer dan y_1 dan y_2 adalah dua solusi deret pangkat yang analitik pada x_0. (Boyce & DiPrima, 2001)

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien fungsi mempunyai bentuk

$$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0$$

Bisa ditulis dengan dalam bentuk baku yaitu

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

penyelesaiannya dengan menggunakan metode deret pangkat dalam $(x - x_0)$ dan bentuk penyelesaian karena bergantung pada titik x_0.

Penyelesaian persamaan diferensial di titik biasa

Penyelesaian persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ dalam suatu selang di sekitar titik biasa x_0.

Teorema Jika x_0 titik biasa dari persamaan diferensial

$$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0$$

maka penyelesaian umum persamaan diferensial itu mempunyai suatu uraian deret pangkat di sekitar x_0, yaitu $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ dalam selang $|x - x_0| < R$.

Bukti

Bentuk baku persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien fungsi yaitu $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi analitik.

Misalkan fungsi $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n$ dan $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n$ dan $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ untuk $|x - x_0| < R$.

Maka diturunkan deret pangkat y sampai turunan kedua diperoleh

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

dan

$$\begin{aligned} P(x)y' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n (x - x_0)^{n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k}\right)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x)y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

Mensubtitusikan ke persamaan $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, didapatkan

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k}\right) \times (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right)(x - x_0)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x - x_0)^n + \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right)(x - x_0)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)(n+2) a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right)(x - x_0)^n = 0$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua deret diperoleh

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} = 0$$

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n} \left((k+1) a_{k+1} p_{n-k}\right) + a_k q_{n-k})$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)a_{k+1}p_{n-k}\right.$$
$$\left.+ a_k q_{n-k}\right), n = 0,1,2, \dots$$

Rumus di atas merupakan recurrence formula (relasi berulang). Recurrence formula adalah mendefinisikan suatu deret ke dalam bentuk satu atau lebih deret sebelumnya.

Diambil a_0 dan a_1 sebarang konstanta, maka koefisien $a_2, a_3, a_4, \dots$ dapat ditentukan sebagai kombinasi linear dari a_0 dan a_1. Jadi $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ merupakan penyelesaian umum dari persamaan diferensial $b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0$ di sekitar titik biasa $x = x_0$.

Penyelesaian persamaan diferensial di di titik singular

Penyelesaian persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien fungsi $(x - x_0)P(x)$ dan $(x - x_0)^2Q(x)$ dalam suatu selang di sekitar titik singular yang reguler x_0 yang mempunyai suatu himpunan berbentuk $0 < |x - x_0| < R$ untuk suatu bilangan positif R.

Teorema Frobenius

Jika $x = x_0$ merupakan titik singular reguler dari persamaan diferensial

$$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0$$

maka setidaknya mempunyai satu solusi berbentuk

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n+r}$$

di mana r adalah konstanta yang ditentukan dan deret konvergen dalam selang $0 < |x - x_0| < R$.

Bukti

Bentuk baku persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien fungsi yaitu $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi analitik Misalkan fungsi $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n$ dan $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n$ dan $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^{n+r}$ untuk $0 < |x - x_0| < R$.

Maka diturunkan deret pangkat y sampai turunan kedua diperoleh

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x - x_0)^{n+r-1}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n(x - x_0)^{n+r-2}$$

dan

$$(x - x_0)P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n$$
$$P(x) = \frac{1}{(x - x_0)}\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n$$

$$(x - x_0)^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n$$
$$Q(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2}\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n$$

maka

$$P(x)y' = \frac{1}{(x - x_0)}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n\right) \times$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x - x_0)^{n+r-1}\right)$$
$$= (x - x_0)^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n\right) \times$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x - x_0)^{n+r-1}\right)$$
$$= (x - x_0)^{r-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n\right) \times$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n(x - x_0)^n\right)$$
$$= (x - x_0)^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k(k+r)\right)$$
$$\times (x - x_0)^n$$

$$Q(x)y = \frac{1}{(x - x_0)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n\right)$$
$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n+r}\right)$$

$$= (x-x_0)^{-2} \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}\right)$$
$$= (x-x_0)^{r-2} \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)$$
$$= (x-x_0)^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k\right) (x-x_0)^n$$

Mensubtitusikan ke persamaan $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, didapatkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n (x-x_0)^{n+r-2} + (x-x_0)^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} a_k (k+r)\right) (x-x_0)^n + (x-x_0)^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k\right) (x-x_0)^n = 0$$

$$(x-x_0)^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n (x-x_0)^n + (x-x_0)^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} a_k (k+r)\right) (x-x_0)^n + (x-x_0)^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k\right) (x-x_0)^n = 0$$

Dengan koefisien $(x-x_0)^{r-2}$ akan diperoleh:

untuk koefisien $(x-x_0)^{r-2}$: $[r(r-1) + p_0 r + q_0] a_0 = 0$

ari asumsi $a_0 \neq 0$ maka

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

Persamaan diatas disebut sebagai persamaan indisial.

Persamaan indisial adalah persamaan kuadrat dalam r. Dalam penyelesaian persamaan diferensial di titik singular regular terdapat 3 jenis solusi akar-akar yaitu :

Kasus 1 jika $r_1 - r_2 \neq$ bilangan bulat, maka

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1} \quad , a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2} \quad , b_0 \neq 0$$

Kasus 2 jika $r_1 = r_2 +$ (bilangan bulat positif), maka

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1} \quad , a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln|x-x_o| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2} \quad , b_0 \neq 0$$

Kasus 3 jika $r_1 = r_2$, maka

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1} \quad , a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x-x_o| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2}$$

D. Kesimpulan

Penyelesaian persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien fungsi menggunakan deret pangkat ini dapat dilihat dari bentuk penyelesaian yang bergantung pada titik $\boldsymbol{x_0}$. Bentuk penyelesaian deret mempunyai dua titik yaitu:

1. Titik biasa
   Pada titik biasa fungsi $P(x)$ dan $Q(x)$ pada persamaan diferensial analitik di titik x_0. Di titik biasa akan menghasilkan recurrence formula yang berbentuk

$$\boldsymbol{a_n = -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} \big((k+1) a_{k+1} p_{n-k-2} + a_k q_{n-k-2}\big), n = 2, 3, 4 \ldots}$$

2. Titik singular regular
   Titik singular merupakan titik yang tidak analitik pada titik x_0. Jika fungsi $(x-x_0)P(x)$ dan $(x-x_0)^2 Q(x)$ pada persamaan diferensial analitik di titik x_0 maka dapat dikatakan titik singular yang reguler. Pada titik singular reguler mempunyai dua penyelesaian bebas linear dan mempunyai persamaan

indisial yang merupakan persamaan kuadrat yang mempunyai bentuk :

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0$$

E. Saran

Penelitian dapat dikembangkan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial orde dua tidak homogen dengan koefisien fungsi menggunakan metode deret pangkat.

Daftar Pustaka

Boyce, W.E & DiPrima, R.C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Bronson, R. & Costa, G.B. *Differential Equations Third Edition*. Terjemahan oleh Thombi Layukallo. 2007. Jakarta: Erlangga.

Darmawijoyo. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa Suatu Pengantar*. Jakarta: Erlangga.

Kartono. 1994. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Andi Offset.

Ningsih, N.L. 2008. *Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Tiga Dengan Meode Deret pangkat*. Skripsi. Universitas Islam Negeri Malang.

Sangadji. 2009. *Solusi Persamaa Diferensial Linear Tingkat Dua Di Titik Regular Singular Dengan Deret Pangkat*, (Online), Vol. 9, No. 2 : 118-125, (http://research-dashboard.binus.ac.id/.../05_Sangadji_NEW%20SOLUSI..../, diakses 12 Mei 2019)

Santoso, W. 1998. *Persamaan Diferesial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi 2*. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, M.R. *Theory and Problem of Fourier Analysis (Schaum Series)*. Terjemahan oleh Ir. Asjhar Imron. 1986. Jakarta: Erlangga.

Wrede, R.C. & Spiegel, M.R. *Advanced Calculus Second Edition*. Terjemahan Refina Indriasari. 2007. Jakarta: Erlangga.