Penerapan Pewarnaan Graf sebagai Metode untuk Mencari Solusi Permainan Sudoku

[1]Fari Ardilla Adrianto, [2]Yurika Permanasari, [3]Icih Sukarsih

[1,2]*Prodi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Bandung,*
Jl. Tamansari No. 1 Bandung 40116
e-mail: [1]fari_ardilla@yahoo.co.id, [2]yurika@yahoo.com, [3]sukarsh@yahoo.co.id

Abstrak. *Makalah ini membahas tentang Penerapan Pewarnaan Graf Sebagai Metode Untuk Mencari Solusi Permainan Sudoku. Sudoku adalah sebuah permainan teka-teki yang memasukan angka 1 sampai n ke dalam kotak sehingga tidak ada angka yang sama dalam satu kolom, baris maupun kotak persegi / grid. Sudoku dapat dipandang sebagai pewarnaan parsial dari graf. Sudoku dapat ditransformasi ke dalam graf dengan mengubah setiap elemen Sudoku menjadi verteks dan elemen yang bertetangga sebagai edge. Dengan demikian teknik pewarnaan graf dapat digunakan sebagai salah satu teknik untuk menyelesaikan permainan Sudoku. Setiap Sudoku n x n akan memiliki warna minimal $\chi(G) = n$ sehingga memiliki polinomial kromatik $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n+1} \ldots (\lambda-(n-1))^{n+1}$ dimana χ adalah warna minimal (bilangan kromatik) yang menunjukkan bahwa banyaknya solusi permainan Sudoku ada sebanyak $P(G,\lambda)$.*

Kata kunci *: Sudoku, Pewarnaan Graf, Bilangan Kromatik, Polinomial Kromatik*

A. Pendahuluan

Sudoku pertama kali diperkenalkan oleh Howard Garns pada 1979 lewat suatu masalah di Indianapolis. Pertama kali diterbitkan di sebuah surat kabar Perancis pada tahun 1985. Versi modern permainan ini dimulai di Indianapois kemudian menjadi terkenal kembali di Jepang pada tahun 1986, ketika penerbit Nikoli menemukan teka-teki ini.

Sudoku merupakan jenis teka-teki yang sekarang telah berkembang dan menarik perhatian berbagai kalangan. saat ini Sudoku dapat diperoleh dalam buku teka-teki, web site, bahkan dalam handphone, kotak game atau dapat dibuat dengan menggunakan software yang tersedia.

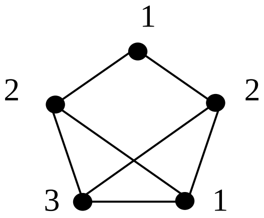
Teka-teki Sudoku dapat dipandang sebagai pewarnaan parsial dari graf. Banyak cara menyelesaikan teka-teki Sudoku akan sama dengan banyak cara mewarnai titik-titik yang belum diwarnai, yang dinyatakan dengan polynomial kromatik yang menunjukkan banyakanya cara mencari solusi Sudoku.

B. Landasan Teori

a. Bilangan Kromatik

Sebuah graf dapat diwarnai dengan memberikan warna berbeda ke setiap vertexnya. Pada kenyataannya, kebanyakan graf dapat diwarnai lebih sedikit warna daripada jumlah vertex pada graf tersebut. Hal ini dapat mengantarkan pertanyaan yaitu berapa warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai sebuah graf. Maka muncul istilah bilangan kromatik.

Definisi 1. *Bilangan Kromatik G, dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah bilangan terkecil k sehingga G dapat diwarna λ* (Wilson & Watkins, 1989: 235).



Gambar 2.1 Graf berwarna dengan bilangan kromatik 3

Gambar 2.6 adalah contoh graf yang diwarnai dengan bilangan kromatiknya. Graf tersebut tidak dapat diwarnai dengan warna kurang dari 3, karena terdapat edge yang bertetangga dengan dua edge, dan dua edge tersebut juga bertetangga. Sehingga, ada tiga edge yang harus diberi 3 warna berbeda. Jadi bilangan kromatik dari graf tersebut adalah 3.

b. Polinomial Kromatik

Definisi 2. *Misal G merupakan graf sederhana, dan* P_G *(k) adalah banyak cara mewarnai vertex G dengan k warna sedemikian sehingga tidak ada dua vertex yang bertetangga mendapat warna sama. Fungsi* P_G *(k) disebut polinomial kromatik G atau suku banyak kromatik G.*

c. Algoritma Pewarnaan Graf

Algoritma Welch-Powell dapat digunakan untuk mewarnai sebuah graf *G* secara mangkus. Algoritma ini hanya memberikan batas atas untuk $\chi(G)$, yaitu bahwa algoritma tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai *G*. Algoritma Welch-Powell adalah sebagai berikut:

1. Urutkan simpul-simpul dari *G* dalam derajat yang menurun (urutan seperti ini mungkin tidak unik karena beberapa simpul mungkin berderajat sama).
2. Gunakan satu warna untuk mewarnai simpul pertama (yang mempunyai derajat tertinggi) dan simpul-simpul lain (dalam urutan yang berurut) yang tidak bertetangga dengan simpul pertama ini.
3. Mulai lagi dengan simpul derajat tertinggi berikutnya di dalam daftar terurut yang belum diwarnai dan ulangi proses pewarnaan simpul dengan menggunakan warna kedua
4. Ulangi penambahan warna-warna sampai semua simpul telah diwarnai.

d. Sudoku

Sudoku terdiri dari 9×9 persegi yang dibagi menjadi 9 kotak lebih kecil berisikan 3× 3 persegi. Untuk memecahkan *sudoku*, masing-masing baris, kolom, dan kotak harus berisikan angka 1 sampai 9, serta tidak boleh ada angka yang kembar di setiap baris, kolom, dan kotak. Berikut disajikan contoh *Sudoku.*

	9				6		4	
		5	3					8
				7		2		
		1		5				3
	6				9		7	
2				8	4	1		
		3		1				
8					2	5		
	5		4				8	

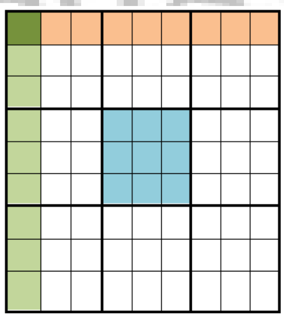
Gambar 2.2 Sudoku

Keterangan :
1. Seluruh *sudoku* atau bingkai angka ajaib disebut *grid* (bingkai).
2. Setiap *grid* berisi sembilan kotak berukuran 3× 3 disebut *box* (kotak).
3. Setiap *box* berisi 9 sel-sel kotak yang harus diisi angka sebagai *square* (persegi).

C. Pembahasan

a. Graf Sudoku

Setiap persegi (kotak kecil) dari *Sudoku* diwakili oleh titik. Sehingga graf dari *sudoku* 9 x 9 memiliki 81 titik yang sesuai dengan jumlah kotaknya. Setiap titik dari graf *sudoku* adjasen dengan titik yang sebaris, sekolom, dan sekotak (3x3).



Gambar 3.1 Puzzle Sudoku 9 x 9

Keterangan:
= baris = kolom = kotak (3x3)

Langkah – langkah yang bisa digunakan untuk pengerjaan Sudoku menggunakan graf adalah sebagai berikut:

1. Mengubah elemen-elemen Sudoku ke dalam bentuk graf Sudoku dimana setiap elemen merupakan vertex graf tersebut dan dilambangkan dengan $v_{i,j}$ dengan $1 \leq i, j \leq n^2$. Vertex vi,j dan vi,j dikatakan bertetangga jika i i = i’ atau j = j’ yang dihubungkan oleh sebuah edge. Edge-edge ini dipandang sebagai relasi dari setiap elemen-elemen bilangan pada Sudoku
2. Memberikan warna pada setiap vertex graf Sudoku. Caranya adalah dengan memberikan warna tertentu terhadap suatu vertex, kemudian cari vertex lain yang belum diberi warna dan lakukan proses yang sama. Pencarian ini dilanjutkan pada vertex-vertex lain yang belum diberi warna sampai semua vertex sudah terwarnai dengan tepat. Dalam teori graf, jika vertex-vertex yang dihubungkan oleh edge tidak mempunyai warna yang sama disebut ‘warna yang tepat”.
3. Mengubah kembali graf Sudoku yang sudah diwarnai kebentuk awal permainan Sudoku, yaitu tabel Sudoku. Warna pada graf Sudoku diubah menjadi bilangan pada permainan Sudoku (Munir, 2005:429).

b. Contoh kasus Sudoku 9 x 9

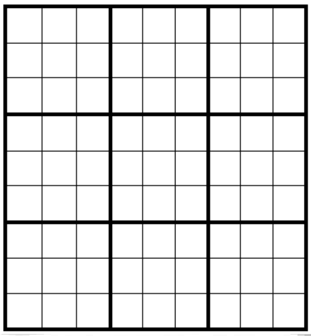
Sudoku 9 x 9 merupakan graf teratur dengan n = 9, maka Sudoku 9 x 9 memiliki 9 warna dan derajat dari bilangan khromatiknya adalah 10 sedemikian hingga diperoleh polynomial khromatiknya sebagai berikut:

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{10}(\lambda-2)^{10}(\lambda-3)^{10}(\lambda-4)^{10}(\lambda-5)^{10}(\lambda-6)^{10}(\lambda-7)^{10}(\lambda-8)^{10}$$

$$= 9(9-1)^{10}(9-2)^{10}(9-3)^{10}(9-4)^{10}(9-5)^{10}(9-6)^{10}(9-7)^{10}(9-8)^{10}$$

$$= 1{,}0219 \times 10^{47}$$

Jika diberikan kasus Sudoku seperti gambar dibawah



Gambar 3.2 Sudoku Awal 9 x 9

Untuk mencari solusinya, dilakukan teknik pewarnaan graf berdasarkan bilangan kromatik yang telah diketahui. Warna minimal yang harus dimiliki Sudoku 9 x 9 adalah 9 warna, dengan demikian Sudoku tersebut mempunyai solusi :
Berikut salah satu cara penyelesaian untuk permasalahan Sudoku Gambar 3.2.

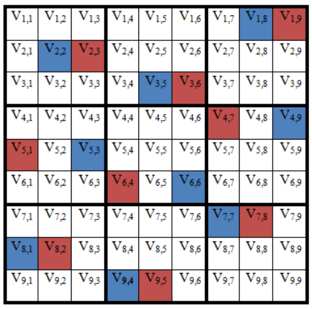
Diberikan 9 warna sebagai berikut

- 1 = biru
- 2 = merah
- 3 = hijau
- 4 = kuning
- 5 = ungu
- 6 = orange
- 7 = coklat
- 8 = abu
- 9 = pink

Vertex $v_{2,2}$, $v_{3,5}$, $v_{1,8}$, $v_{5,3}$, $v_{6,6}$, $v_{4,9}$, $v_{8,1}$, $v_{9,4}$ dan $v_{7,7}$ tidak saling bertetangga maka diberikan warna awal yaitu warna biru, sehingga tahap awal penyelesaian diperoleh gambar berikut :

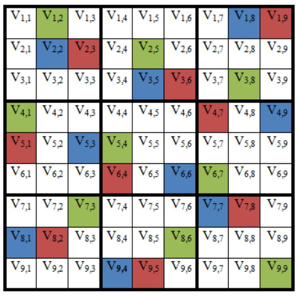
Gambar 3.2 Pewarnaan Biru (angka 1)

Kemudian $v_{1,9}$, $v_{2,3}$, $v_{3,6}$, $v_{4,1}$, $v_{5,4}$, $v_{6,7}$, $v_{7,8}$, $v_{8,1}$ dan $v_{9,4}$ bertetangga dengan vertex yang sudah diberi warna biru dan antara kesembilan vertex tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna merah.



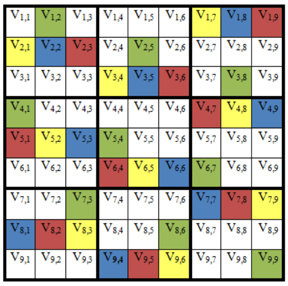
Gambar 3.3 Pewarnaan Merah (angka 2)

Vertex $v_{1,2}$, $v_{2,5}$, $v_{3,8}$, $v_{4,1}$, $v_{5,4}$, $v_{6,7}$, $v_{7,3}$, $v_{8,6}$ dan $v_{9,9}$ bertetangga dengan vertex-vertex yang sudah diberi berwarna biru dan merah tetapi antara kesembilan vertex tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna hijau.



Gambar 3.4 Pewarnaan Hijau (angka 3)

Vertex $v_{1,7}$, $v_{2,1}$, $v_{3,4}$, $v_{4,8}$, $v_{5,2}$, $v_{6,5}$, $v_{7,9}$, $v_{8,3}$ dan $v_{9,6}$ bertetangga dengan vertex-vertex yang sudah diberi berwarna biru, merah dan hijau tetapi antara kesembilan vertex tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna kuning.



Gambar 3.5 Pewarnaan Kuning (angka 4)

Vertex $v_{1,3}$, $v_{2,6}$, $v_{3,9}$, $v_{4,2}$, $v_{5,5}$, $v_{6,8}$, $v_{7,1}$, $v_{8,4}$ dan $v_{9,7}$ bertetangga dengan vertex-vertex yang sudah diberi berwarna biru, merah, hijau dan kuning tetapi kesembilan vertex tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna ungu.

Gambar 3.6 Pewarnaan Ungu (angka 5)

Vertex $v_{3,3}$, $v_{1,6}$, $v_{2,9}$, $v_{6,1}$, $v_{4,4}$, $v_{5,7}$, $v_{9,2}$, $v_{7,5}$ dan $v_{8,8}$ bertetangga dengan vertex-vertex yang sudah diberi berwarna biru, merah, hijau, kuning dan ungu tetapi kesembilan vertex tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna orange.

Gambar 3.7 Pewarnaan Orange (angka 6)

Vertex $v_{1,3}$, $v_{2,4}$, $v_{3,7}$, $v_{4,3}$, $v_{5,6}$, $v_{6,9}$, $v_{7,2}$, $v_{8,5}$ dan $v_{9,8}$ bertetangga dengan vertex-vertex yang sudah diberi berwarna biru, merah, hijau, kuning, ungu dan orange tetapi kesembilan vertex tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna coklat

Gambar 3.8 Pewarnaan Coklat (angka 7)

Vertex $v_{3,1}$, $v_{1,4}$, $v_{2,7}$, $v_{6,2}$, $v_{4,5}$, $v_{5,8}$, $v_{9,3}$, $v_{7,6}$ dan $v_{8,9}$ bertetangga dengan vertex-vertex yang sudah diberi berwarna biru, merah, hijau, kuning, ungu, orange dan coklat tetapi kesembilan vertex tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna abu.

Gambar 3.9 Pewarnaan Abu (angka 8)

Vertex $v_{3,2}$, $v_{1,5}$, $v_{2,8}$, $v_{6,3}$, $v_{4,6}$, $v_{5,9}$, $v_{9,1}$, $v_{7,4}$ dan $v_{8,7}$ bertetangga dengan vertex-vertex yang sudah diberi berwarna biru, merah, hijau, kuning, ungu, orange, coklat dan abu tetapi kesembilan vertex tersebut tidak saling bertetangga, sehingga diberikan warna pink.

Gambar 3.10 Pewarnaan Pink (angka 9)

Setelah semua warna terpenuhi dan tidak ada verteks yang bertetangga yang sama warnanya, maka kembalikan warna tersebut menjadi angka.

7	3	5	8	9	6	4	1	2
4	1	2	7	3	5	8	9	6
8	9	6	4	1	2	7	3	5
3	5	7	6	8	9	2	4	1
2	4	1	3	5	7	6	8	9
6	8	9	2	4	1	3	5	7
5	7	3	9	6	8	1	2	4
1	2	4	5	7	3	9	6	8
9	6	8	1	2	4	5	7	3

Gambar 3.11 Sudoku Akhir

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa Teknik pewarnaan graf dapat digunakan sebagai salah satu teknik untuk menyelesaikan permainan Sudoku setelah mentransformasi matriks Sudoku menjadi suatu Graf.

Graf Sudoku n x n merupakan graf teratur dimana Sudoku n x n setiap vertexnya memiliki derajat yang sama dan memiliki warna minimal atau bilangan kromatik $\chi(G) = n$ sedemikian hingga memiliki polinomial kromatik $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n+1} \ldots (\lambda - (n-1))^{n+1}$ yang menunjukkan banyaknya solusi permainan Sudoku. Sudoku 9 x 9 memiliki minimal 9 warna dengan banyaknya solusi $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{10}(\lambda-2)^{10}(\lambda-3)^{10}(-4)^{10}(\lambda-5)^{10}(\lambda-6)^{10}(\lambda-7)^{10}(\lambda-8)^{10}$. Secara umum Sudoku 9 x 9 mempunyai banyak permasalahan dan 1,0212 x 10 ^{47} cara mewarnai.

Daftar Pustaka

Agnes M. Herzberg, M. Ram Murty, “Sudoku Square and Chromatic Polynomials”,http://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf. Tanggal Akses: 11 Desember 2011 pukul 10.00

Wilson, Robin J; Watkins, John J. (1989). *Graphs An Introductory Approach*: a first course in discrete mathematics

Rossen, Kenneth H. (1999). *Descrete Mathematics and Its Aplications*, McGraw Hill Internasional,

Wibisono, Samuel. (2008). *Matematika Diskrit*, Graha Ilmu, Yogyakarta

Jonhsonbaugh, Ricard.(2001). *Discrete Mathematics*. Prentice Hall Int, New Jersey

Lipschutz, Ph.D.,Seymour; Lipson, Ph.D., Marc. (2008). *Matematika Diskret*, Erlangga

Rinaldi, Munir. (2005). *Matematika Diskrit*, edisi ke-3. Bandung : Informatika