 ISSN: 2460-6464

Simulasi Kestabilan Model Predator Prey Tipe Holling II dengan Faktor Pemanenan

[1]Ai Yeni, [2] Gani Gunawan, [3]Icih Sukarsih
[1,2,3]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No. 1 Bandung 40116
e-mail : [1]yeniayyeni08@gmail.com, [2]ggani9905@dmail.com, [3]sukarsh@yahoo.co.id

Abstrak. Model predator prey merupakan interaksi dua populasi. Salah satu model interaksi antara makhluk hidup dalam suatu ekosistem adalah model predator prey dengan prey sebagai spesies yang dimangsa dan predator sebagai spesies yang memangsa. Model predator prey pertama kali dekenalkan oleh Alfred J. Lotka (1925) dan Vito Volterra (1926). Model predator prey ini juga dikenal dengan model Lotka_Volterra. Dalam perkembangannya, model ini telah banyak mengalami modifikasi seperti menambahkan variable-variable baru yaitu stocking, diffusion, delay dan pemanenan. Pemanenan dilakukan pada populasi mangsa karena diasumsikan hanya populasi mangsa yang memiliki nilai komersil dan melibatkan manusia (nelayan) dalam proses pemanenannya. Dari model tersebut dilakukan analisis dengan menentukan titik setimbang model dan menganalisis kestabilan titik setimbang model. Untuk menentukan sifat kestabilan dari titik setimbang pada model,maka perlu dicari terlebih dahulu nilai eigen-nya. Setelah didapatkan nilai eigen, dapat ditentukan kestabilan dari titik setimbang tersebut berdasarkan tanda bagian real-nya. Analisis hasil simulasi menggunakan program MAPLE dengan memvariasikan nilai parameter.

Kata Kunci: Model Predator Prey, Fungsi Holling, Titik Setimbang, Stabil Asimtotis.

A. Pendahuluan

Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang dari matematika terapan yang cukup penting dan bermanfaat. Salah satu bentuk pemodelan yang dapat diterapkan yaitu pada masalah ekologi. Salah satu model interaksi antara makhluk hidup dalam suatu ekosistem adalah model *Predator Prey*, dengan *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan predator sebagai spesies yang memangsa. Model *predator prey* pertama kali dikenalkan oleh *Alfred J. Lotka* (1925) dan *Vito Volterra* (1926), yang memformulasikan model matematika tersebut dalam sistem persamaan diferensial, model ini dikenal dengan model *Lotka-Volterra*. Dalam perkembangannya, model ini telah banyak mengalami modifikasi seperti menambahkan variable-variable baru seperti stocking, diffusion, delay, dan pemanenan.

Dalam makalah ini akan membahas model *predator prey* dengan menambahkan variable pemanenan pada populasi prey. Sebagai contoh interaksi yang menggambarkan model ini yaitu interaksi antara populasi ikan kecil sebagai *prey* dan populasi ikan besar sebagai predator. Pemanenan ini dilakukan pada populasi *prey* karena diasumsikan hanya populasi *prey* yang memiliki nilai komersil dan melibatkan manusia (nelayan) dalam proses pemanenannya. Dari model tersebut dapat dilakukan analisis dengan menentukan titik setimbang model dan menganalisis kestabilan titik setimbang model serta melakukan simulasi dari kestabilan di titik setimbang yang berlaku pada model *predator prey* tipe *holling* II dengan faktor pemanenan pada *prey*. Simulasi numerik diberikan untuk menunjang hasil analisis kestabilan yang telah diperoleh.

B. Landasan Teori

Teorema 1 : Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekivalen satu sama lain.

a. λ adalah nilai eigen dari A
b. Sistem persamaan (λI – A)x = 0 mempunyai penyelesaian yang tak trivial.
c. Ada sebuah vektor tak nol x di dalam Rn sehingga Ax = λx.
d. λadalah penyelesaian real dari persamaan karakteristik det (λI – A) = 0

(Anton dan Rorres, 2000).

Model predator-prey merupakan interaksi dua populasi, yaitu populasi mangsa dan pemangsa. Hubungan interaksi keduanya diperhitungkan dengan fakta bahwa spesies pemangsa akan memakan spesies mangsa. Pada akhirnya akan diperoleh system persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \qquad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \qquad (2.2)$$

dengan :

a adalah koefisien laju kelahiran mangsa,
b adalah koefisien laju kematian pemangsa,
α dan β adalah konstanta interaksi.

Dalam hal ini, α memberikan penurunan dalam jumlah populasi mangsa karena spesies pemangsa akan memakannya, sedangkan β memberikan peningkatan pada jumlah populasi dinamakan persamaan Predator-Prey Lotka-Volterra (Boyce dan diprima, 2008).

Misalkan dalam populasi terhadap mangsa x dan daya dukung lingkungan K terdapat pada model pertumbuhan perkapita sehingga kapasitas penampungan lingkungan yang tersisa adalah $K - x$ individu. Jadi masih ada $\frac{K-x}{K}$ bagian lingkungan yang masih bisa ditinggali. Bagian inilah yang sebanding dengan pertumbuhan populasi.Sehingga terbentuk persamaan pertumbuhan populasi perkapita berikut.

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Persamaan diatas merupakan persamaan pertumbuhan logistik. Konstanta r adalah laju pertumbuhan intrinsik, yaitu nilai yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi dan diasumsikan $r > 0$ karena setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak. Konstanta K adalah kapasitas tampung, yaitu ukuran maksimum dari suatu populasi yang dapat disokong oleh suatu lingkungan.

Pada akhirnya diperoleh sistem persamaan model predator-prey tipe holling II dengan faktor pamanenan pada prey dalam jurnal Suzyanna adalah sebagai berikut:

$$f(x,y) = \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{ay + x} - Ex$$

$$g(x,y) = \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha bxy}{ay + x} - dy$$

Dengan :

x(t) adalah populasi *prey* saat *t*
y(t) adalah populasi *predator* saat *t*
$\frac{dx}{dt}$ adalah laju perubahan populasi *prey* pada saat *t*

$\frac{dy}{dt}$ adalah laju perubahan populasi *predato r* pada saat *t*
Populasi *prey* bertumbuh secara logistik
K adalah kapasitas daya tampung *prey*
r adalah laju pertumbuhan interinstik *prey* pada saat tidak ada *predator*
d adalah laju kematian *predator* saat tidak ada *prey*
b adalah laju konversi pemangsa *predator*
α adalah laju maksimum konsumsi *prey*
a adalah half-saturation constant
E adalah laju pemanenan *predator*

C. Pembahasan dan Hasil Penelitian

Model predator prey tipe holling II dengan faktor pemanenan pada prey adalah sebagai berikut:

$$f(x,y) = \frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{ay+x} - Ex \qquad (3.1)$$

$$g(x,y) = \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha bxy}{ay+x} - dy \qquad (3.2)$$

Untuk memcari titik setimbangmaka tahap pertama yang harus dilakukan adalah dengan men-nol kan ruas kiri pada sistem persamaan (3.1). Maka akan didapat persamaan sebagai berikut:

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{ay+x} - Ex = 0$$

$$\frac{\alpha bxy}{av+x} - dy = 0$$

Adapun untuk memperoleh titik setimbang ini diperoleh satu persatu kemudian ada yang disubstitusikan pada persamaan-persamaan yang berikutnya. Dengan tahapan-tahapan sebagai berikut.

Titik setimbang kepunahan predator adalah suatu kondisi saat predator tidak ada atau punah, yaitu pada saat $y = 0$ dan $x \neq 0$. Misalkan titik setimbang kepunahan predator dinotasikan dengan $A = (x,y) = (x_1,0)$ .Dengan menggunakan syarat $f(x,y) = g(x,y) = 0$, $y = 0$ dan $x \neq 0$ maka didapat kondisi sebagai berikut
Dari persamaan (3.2) diproleh :

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{ay+x} - Ex = 0$$

$$x = \frac{K}{r}(r-E) \quad (3.3)$$

Berdasarkan (3.3), maka didapatkan titik setimbang yaitu

$$A = (x,y) = \left(\frac{K}{r}(r-E), 0\right)$$

Titik setimbang kedua spesies hidup berdampingan adalah kondisi saat $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ Misalkan titik setimbang kedua spesies hidup berdampingan dinotasikan dengan $B = (x,y) = (x_2, y_2)$.

Dengan menggunakan syarat $f(x,y) = g(x,y) = 0$, $x_2 \neq 0$ dan $y_2 \neq 0$ maka

didapatkan kondisi sebagai berikut.
Dari persamaan (3.2) dan (3,3) diperoleh

$$B=(x,y)=\left(\frac{K(abr-\alpha b+d-abE)}{abr},\frac{K(\alpha b-d)(abr-\alpha b+d-abE)}{a^2brd}\right)$$

Karena $x\neq 0$ dan $y\neq 0$ dan x > 0 maupun y > 0, maka titik setimbang ada jika

$$\frac{K(abr-\alpha b+d-abE)}{abr}>0$$

$$\frac{(abr-\alpha b+d)}{ab}>E$$

Diasumsikan

$$\frac{(abr-\alpha b+d)}{ab}>0$$

$$abr-\alpha b+d>0$$

dan

$$\frac{K(\alpha b-d)(abr-\alpha b+d-abE)}{a^2brd}>0 \quad \text{maka}$$

$$E<\frac{\alpha(ab^2r-\alpha b^2+2bd)-abdr-d^2}{(\alpha ab^2-abd)}$$

Misalkan $\alpha_1=\frac{abr+d}{b}$; $E_1=\frac{abr-\alpha b+d}{ab}$ dan $E_2=\frac{\alpha(ab^2r-\alpha b^2+2bd)-abdr-d^2}{\alpha ab^2-abd}$,
maka titik seimbang B dijamin ada jika $\alpha<\alpha_1$ dan $E_1<E<E_2$

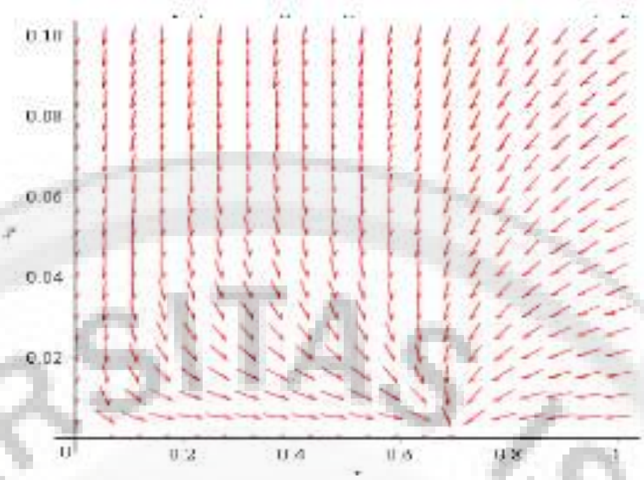
Sistem persamaan di atas merupakan sistem nonlinier. Menurut Boyce dan Diprima, kesetimbangan dari sistem non linier ditentukan dengan terlebih dahulu melakukan linierisasi di sekitar titik kesetimbangan. Linierisasi tersebut menghasilkan matriks jacobi. Nilai eigen dari matriks Jacobi pada masing-masing titik kesetimbangan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $(A - \lambda I) = 0$. Selanjutnya, kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen tersebut

1. Titik kesetimbangan A stabil asimtotis local jika

$$\alpha<\alpha_2$$
$$E>E_2$$
$$\text{Dengan } E_2=-r \text{ dan } \alpha_2=\frac{d}{b}$$

2. Titik kesetimbangan B dijamin ada jika kedua spesies tidak punah atau x > 0 dan y > 0

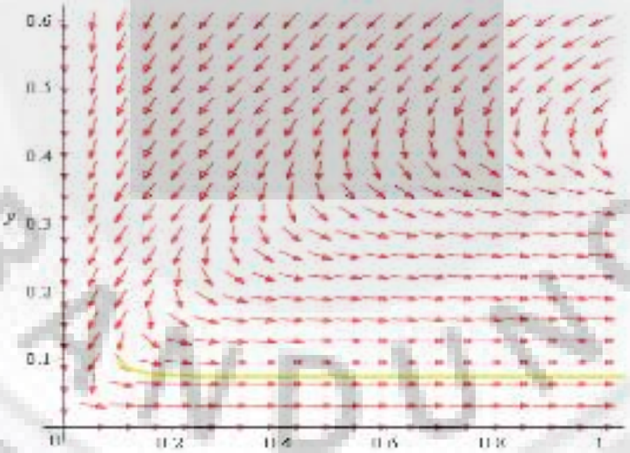
Hasil yang diperoleh dari simulasi, selanjutnya dianalisis untuk mengetahui apakah terjadi perubahan populasi prey dan predator dari model tersebut. Analisis ini dilakukan dengan mengubah parameter-parameter yang mempengaruhi popukasi prey dan predator tersebut secara bervariasi.Untuk kasus pertama, diberikan nilai parameter r=0,62, d=-,42, b=0,56, a=0,3, α = 0,5, K=2,1, dan E=0,41 yang menghasilkan populasi *predator* nol (habis) dan *prey* ada. Simulasi Model *Predator-Prey* Tipe Holling II dengan Faktor Pemanenan Pada Prey dapat dilihat pada grafik berikut ini.



Gambar 3.1 Grafik Predator-Prey untuk Kepunahan Predator

Pada Gambar 3.1 dapat dijelaskan bahwa popylasi prey yaitu 0.7112903226 dan populasi predator yaitu 0.

Untuk kasus kedua, diberikan beberapa nilai parameter r=0,8, d=0,42, b=0,73, a=0,3, α = 0,6, K=2,7, dan E=0,28 yang menghasilkan populasi predator dan prey sama-sama ada (hidup berdampingan). Simulasi model Predator Prey Tipe Holling II dengan Faktor Pemanenan Pada Prey dapat dilihat pada grafik berikut ini.



Gambar 3.2 Grafik *Predator-Prey* untuk Kedua Spesies Hidup Berdampingan

D. Kesimpulan

1. Analisis kestabilan asimtotis lokal dari titik setimbang model tersebut yaitu dengan mencari terlebih dahulu nilai eigen-nya. Kemudian model yang digunakan merupakan sistem persamaan non linier maka perlu dilakukan pelinieran dengan menggunakan matriks jakobi. Setelah didapatkan nilai eigen maka dapat ditentukan kestabilannya. Dari model didapatkan titik kesetimbangan kepunahan predator dan titik kesetimbangan kedua spesies hidup berdampingan.

2. Titik kesetimbangan kepunahan predator stabil asimtotis dan titik kesetimbangan kedua spesies hidup berdampingan dijamin ada.

Hasil simulasi untuk kasus pertama, diberikan nilai parameter r=0,62, d=-,42, b=0,56, a=0,3, α = 0,5, K=2,1, dan E=0,41 yang menghasilkan populasi *predator* nol (habis) dan *prey* ada sehingga didapat populasi prey yaitu 0.7112903226 dan populasi predator yaitu 0. Untuk kasus kedua, diberikan beberapa nilai parameter r=0,8, d=0,42, b=0,73, a=0,3,

, K=2,7, dan E=0,28 yang menghasilkan populasi predator dan prey sama-sama ada (hidup berdampingan) sehingga didapat populasi prey yaitu 1,4777602740 dan populasi predator yaitu 0,2110861057.

Daftar Pustaka

Boyce, W. E. Dan Diprima, R. C. 2008. *Elementary Differensial Equations and Boundary Value Problems. Ninth Edition.* John Willey & Sons Inc. New York.

Chakraborty, S., Pal, S. and Bairagi, N. “Predator-Prey Interaction With Harvesting: Mathematical Study With Biological Ramifications”, Applied Mathematical Modelling 36, hal 4044-4059, 2012.

Suzyanna. 2013. *Interaksi Antara Predator-Prey dengan Faktor Pemanenan Prey. Journal of Scientific Modeling & Computation.* **1**:58-66. Surabaya: Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga.

Anton, H., Rorres, C. 2000. *Aljabar Linier Elementer Edisi ke-8.* Jakarta:Erlangga