 ISSN: 2460-6464

Program Linear *Fuzzy* dengan Koefisien dan Konstanta Kendala Bilangan *Fuzzy*

[1]Diah Fauziah, [2]Didi Suhaedi, [3] Gani Gunawan

[1,2,3]Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Jl. Tamansari No. 1 Bandung 40116

e-mail : [1]difauziahdiah@gmail.com, [2]dsuhaedi@hotmail.com, [3]ggani9905@gmail.com

Abstrak. Salah satu asumsi dalam pemodelan program linear adalah kepastian (deterministic). Namun dalam praktek adakalanya bersifat tidak pasti. Masalah ketidakpastian tersebut dapat diselesaikan dengan pendekatan himpunan fuzzy. Program linear fuzzy dengan koefisien dan konstanta bilangan triangular fuzzy dapat diselesaikan dengan mengkonversi bilangan triangular fuzzy ke bilangan crips melalui partial order sehingga dapat diselesaikan menggunakan model program linear biasa. Dari studi kasus terlihat bahwa solusi optimal yang diperoleh lebih realistis karena mempertimbangkan batasan-batasan yang tidak diketahui secara jelas, seperti naik atau turunnya jumlah produksi dan kapasitas bahan baku, dimana dalam memformulasikannya dapat dibentuk dalam program linear klasik.

Kata Kunci : Program Linear Fuzzy, Bilangan Triangular Fuzzy, Partial Order.

A. Pendahuluan

Model program linear mengandung asumsi-asumsi tertentu yang harus dipenuhi salah satu asumsi yang harus dipenuhi, yaitu asumsi kepastian (*deterministic*) pada setiap parameter dalam model program linear yang terdiri dari fungsi tujuan dan fungsi kendala diketahui secara pasti. Namun dalam praktek adakalnya bersifat tidak pasti, seperti naik atau turunnya jumlah produksi dan kapasitas bahan baku. Masalah ketidakpastian ini dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan himpunan *fuzzy*.

Program linear yang menggunakan pendakatan himpunan *fuzzy* disebut dengan program linear *fuzzy*. Ada dua model program linear *fuzzy* yang menggunakan pendekatan bilangan *fuzzy* (Yuan, 1995), yaitu model program linear *fuzzy* dengan konstanta sebelah kanan menggunakan bilangan *fuzzy* (Firmansyah, Ade, 2007) dan model program linear *fuzzy* dengan koefisien dan konstanta sebelah kanan yang menggunakan bilangan *fuzzy*. Dalam makalah ini akan dijelaskan mengenai model model program linear *fuzzy* dengan koefisien dan konstanta sebelah kanan yang menggunakan bilangan *fuzzy* sedangkan fungsi tujuannya tidak *fuzzy*.

B. Landasan Teori

Suatu himpunan *fuzzy* $\bar{A}$ dan X didefinisikan oleh fungsi keanggotaan ($\mu_{\bar{A}}$) yang nilainya berada di interval [0,1], secara matematika dapat dinyatakan dengan :

$$\mu_{\bar{A}} : X \rightarrow [0,1]$$

Salah satu konsep yang paling penting dari himpunan *fuzzy* adalah konsep α – *cut*. α – *cut* adalah suatu bilangan dalam interval tertutup [0,1], yang merupakan himpunan bagian dari himpunan crips dalam himpunan semesta.

Suatu himpunan *fuzzy* $\bar{A}$ *dari* α – *cut* untuk suatu bilangan $\alpha \in [0,1]$ dapat dilambangakan dengan $\bar{A}^{\alpha}$, adalah himpunan crips yang memuat smeua elemen dari semesta X dengan derajat keanggotaan dalam $\bar{A}$ *yang lebih besar atau sama dengan* α yaitu :

α – cut lemah dapat dinyatakan dengan :

$$\bar{A}^{\alpha} = \{x | \mu_{\bar{A}} \geq \alpha\}$$

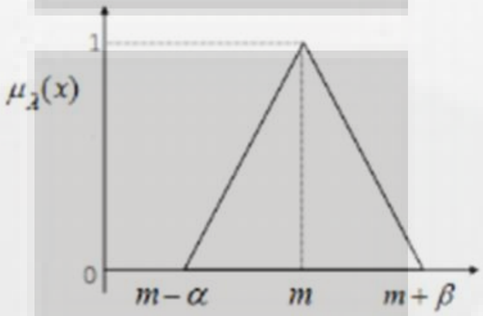
Sedangkan α – *cut* kuat dari himpunan *fuzzy* Ā adalah himpunan crips yang dapat dinyatakan dengan :

$$\bar{A}^{\alpha+} = \{x \mid \mu_{\bar{A}} > \alpha\}$$

Bilangan *fuzzy* yang digunakan pada permasalahan program linear *fuzzy* dengan koefisien dan konstanta kendala *fuzzy* yaitu bilangan triangular *fuzzy* yang direpresentasikan dengan tiga parameter, yaitu m, α, β dimana batas bawah adalah α, yaitu jarak dari m- α dan batas atas adalah β di mana merupakan jarak dari m + β, serta m merupakan fungsi keanggotaan maksimum dengan nilai sama dengan satu (Mansur, 1995). Berikut adalah aturan fungsi keanggotaan triangular :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0; x \geq \alpha \\ 1 - \dfrac{m-x}{\alpha}; m-\alpha \leq x \leq m \\ 1 - \dfrac{x-m}{\beta}; m \leq x \leq m+\beta \\ 0; \beta \leq x \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan bilangan triangular *fuzzy* dapat direpresentasikan pada gambar berikut :



Gambar 2.1 Fungsi Keanggotaan Bilangan Triangular *Fuzzy*

C. Hasil Penelitian

1. Program Linear *Fuzzy* Dengan Koefisien dan Konstanta Kendala *Fuzzy*

Bentuk umum dari program linear *fuzzy* dengan koefisien dan kosntanta kendala *fuzzy*,yaitu pemrograman linear dengan fungsi kendala ($\bar{a}_i$) dan konstanta kendala ($\bar{b}_i$) *fuzzy* ini adalah sebagai berikut (Yuan, 1995) :

Maksimumkan :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (1)$$

Dengan kendala :

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j (\leq, =, \geq) \bar{b}_i \qquad (i = 1,2,3,\dots,m) \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,3,\dots,n)$$

Dimana :

Z = Fungsi tujuan yang dicari nilai optimalnya bernilai real

C_j = Parameter fungsi tujuan ke-j bernilai real

x_j = Variabel keputusan ke-j bernilai real
$\bar{\alpha}_i$ = Koefisien kendala *fuzzy*
$\bar{b}_i$ = Konstanta sebelah kanan *fuzzy*

Bilangan triangular *fuzzy* yang direpresentasikan dengan m, α, β dapat dituliskan pada koefisien ($\bar{\alpha}_i$) sehingga $\bar{\alpha}_i = (m_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij})$ dan konstanta kendala ($\bar{b}_i$) dimisalkan dengan n, δ, θ sehingga dapat dituliskan (n_i, δ_i, θ_i). Sehingga permasalahan program linear dengan koefisien ($\bar{\alpha}_i$) dan konstanta kendala ($\bar{b}_i$) berbentuk bilangan triangular *fuzzy* dapat diformulasikan sebagai berikut :

Maksimumkan

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (3)$$

Dengan kendala :

$$\sum_{j=1}^{n} (m_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}) x_j (\leq, =, \geq)(n_i, \delta_i, \theta_i) \qquad (i = 1,2,3,\dots,m) \qquad (4)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (j = 1,2,3,\dots,n)$$

Penyelesaian permasalahan program linear *fuzzy* disesuaikan dengan penggunaan nilai- nilai operasi aritmatika yang ada di dalamnya, karena nilai fungsi tujuan, fungsi kendala berupa bilangan *fuzzy* maka operasi aritmatika yang digunakan adalah operasi aritmatika bilangan *fuzzy*.

Berikut adalah tahapan dalam menyelesaikan permasalahan program linear *fuzzy* :

a. Tahap ke-1 : mengubah masalah program linear *fuzzy* dimana fungsi tujuan dan fungsi kendala *fuzzy* dikonversi ke dalam program linear biasa.
b. Tahap ke-2 : Setelah fungsi tujuan dan fungsi kendala program linear *fuzzy* dikonversi, maka permasalahan program linear tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode simplek atau metode grafik dan hasil akhir dari permasalahan program linear *fuzzy* yaitu berupa bilangan real.

Karena bilangan triangular *fuzzy* yang digunakan dalam pembahasan ini, maka untuk menyelesaikan program linear *fuzzy* dengan fungsi kendala bilangan *fuzzy* triangular sama seperti tahapan-tahapan diatas, yaitu :

a. Tahap ke-1 :
   - Langkah ke-1 : mengubah bilangan *fuzzy* ($\bar{\alpha}_i$) dan ($\bar{b}_i$) ke bilangan crips dengan mengkonversi bilangan fuzzy triangular menggunakan *partial order*.
   - Langkah ke-2 : Partial order dilambangkan dengan ≤ yang mendefinisikan bahwa $\bar{A} \leq \bar{B}$ jika dan hanya jika *MAX(*$\bar{A} \leq \bar{B}$) = $\bar{B}$, maka bilangan *fuzzy* triangular dapat diurutkan menggunakan partial order dengan mengasumsikan dua bilangan fuzzy tringular yaitu $\bar{A} = (m_1, \alpha_1, \beta_1)$ dan $\bar{B} = (m_2, \alpha_2, \beta_2)$, maka untuk $\bar{A} \leq \bar{B}$ jika dan hanya jika $m_1 \leq m_2$, $m_1 - \alpha_1 \leq m_2 - \alpha_2$, $m_1 + \beta_1 \leq m_2 + \beta_2$.

- Langkah ke-3 : Mengubah formulasi sesuai dengan *partial order*, sehingga formulasi untuk permasalahan pemrograman linear *fuzzy* dengan fungsi kendala bilangan triangular *fuzzy* berubah menjadi seperti berikut:

  Maksimumkan :

  $$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (5)$$

  Dengan kendala :

  $$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j (\leq, =, \geq) n_i$$
  $$\sum_{j=1}^{n} (m_{ij} - \alpha_{ij}) x_j (\leq, =, \geq)(n_i - \delta_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m) \qquad (6)$$
  $$\sum_{j=1}^{n} (m_{ij} + \beta_{ij}) x_j (\leq, =, \geq)(n_i + \theta_i)$$
  $$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

b. Tahap ke-2 :

- Langkah ke-1 : formulasi permasalahan pemrograman linear dengan fungsi kendala bilangan *fuzzy* yang baru diubah ke dalam bentuk standar program linear.
- Langkah ke-2 : Setelah diubah dalam bentuk standar program linear, permasalahan diselesaikan dengan menggunakan metode simplek dan diperoleh hasil akhir berupa bilangan real.

2. Studi Kasus

Sebuah perusahaan memproduksi jua jenis produk, yaitu Produk A dan Produk B. Produk tersebut dikerjakan melalui tiga proses, yaitu proses 1, proses 2, dan proses 3. Untuk membuat Produk A dibutuhkan 4 kg bahan A, 3 kg bahan B, 1.7 kg bahan C, 3 kg bahan D, 1 kg bahan E, 1 kg bahan F, 4 kg bahan G. Dan untuk Produk B dibutuhkan 3 kg bahan A, 1.5 kg bahan B, 0.5 kg bahan C, 0.6 kg bahan D, 0.3 kg bahan E, 1.5 kg bahan F, 2 kg bahan G. Bahan baku yang tersedia di gudang setiap hari adalah 20 kg kg bahan A, 20 kg bahan B, 8 kg bahan C, 10 kg bahan D, 5 kg bahan E, 8 kg bahan F, 17 kg bahan G. Apabila pesenan meningkat seperti pada liburan maka perusahaan memungkinkan adanya penambahan dalam memproduksi Produk A dan Produk B. Untuk Produk A bahan baku yang ditambahkan sebanyak 2 kg bahan A, 1.5 kg bahan B, 0.5 kg bahan C, 1.5 kg bahan D, 0.5 kg bahan E, 0.5 kg bahan F, 2 kg bahan G. Untuk memproduksi Produk B bahan baku yang ditambahkan sebanyak 2.5 kg bahan A, 1 kg bahan B, 0.4 kg bahan C, 0.4 kg bahan D, 0.2 kg bahan E, 1 kg bahan F, 1 kg bahan G. Dengan adanya peningkatan pemesanan perusahaan dituntut untuk dapat memenuhi permintaan, maka dari itu bahan baku yang tersedia di gudang memungkinkan adanya penambahan juga sebanyak 10 kg bahan A, 10 kg bahan B, 6 kg bahan C, 6 kg bahan D, 3 kg bahan E, 2 kg bahan F, dan 7 kg bahan G.

Namun, apabila pemesanan menurun dan harga bahan baku meningkat tetapi produksi harus berjalan, maka perusahaan memungkinkan adanya pengurangan produksi dan pengurangan bahan baku. Untuk Produk A bahan baku yang dikurangi sebanyak 1 kg bahan A, 0.6 kg bahan B, 0.3 kg bahan C, 0.6 kg bahan D, 0.2 kg bahan E, 0.2 kg bahan F, 1 kg bahan G dan untuk Produk B bahan baku yang dikurangi sebanyak 1.5 kg bahan A, 0.5 kg bahan B, 0.1 kg bahan C, 0.6 kg bahan D, 0.3 kg bahan E, 1.5 kg bahan F, dan 2 bahan G. Sehingga bahan baku yang tersedia di gudang juga memungkinkan adanya pengurangan sebanyak 5 kg bahan A, 5 kg bahan B, 4 kg bahan C, 4 kg bahan D, 1 kg bahan E, 1 bahan F, 5 kg bahan G. Waktu yang dibutuhkan untuk memproduksi Produk A adalah 3 menit pada proses 1, 2 menit pada proses 2, dan 20 menit pada proses 3. Untuk memproduksi Produk B membutuhkan 10 menit pada proses 1, 30 menit pada proses 2, dan 10 menit pada proses 3. Jumlah karyawan pada proses 1 sebanyak 2 orang, proses 2 sebanyak 5 orang, dan 2 orang pada proses 3 . Perusahaan bekerja dengan 1 shift, mulai pukul 08.00 sampai pukul 16.00 dengan istirahat selama 1 jam mulai pukul 12.00 sampai 13.00 selama 6 hari kerja dalam seminggu.

Keuntungan yang diperoleh untuk Produk A sebesar Rp. 15.000, dan untuk Produk B sebesar Rp. 10.000. Berdasarkan kondisi tersebut , berapakah keuntungan maksimum yang bisa diperoleh perusahaan?

3. Penyelesaian :

Pada penyelesaian kasus ini, bahan baku dinyatakan dalam kg. Jam kerja karyawan perminggu dapat dihitung :

Proses 1 : 2 x 6 x 60 menit = 720 menit

Proses 2 : 5 x 6 x 60 menit = 1800 menit

Proses 3 : 2 x 6 x 60 menit = 720 menit

Kasus ini dapat ditabulasikan sebagai berikut :

BAHAN BAKU	PRODUK						Kapasitas		
	Produk A			Produk B					
	Tetap	Naik	Turun	Tetap	Naik	Turun	Tetap	Naik	Turun
Bahan A	4 kg	2 kg	1 kg	3 kg	2.5 kg	1.2 kg	20	10	5
Bahan B	3kg	1.5 kg	0.6 kg	1.5 kg	1 kg	0.5 kg	20	10	5
Bahan C	1.7 kg	0.5 kg	0.3 kg	0.5 kg	0.4 kg	0.1 kg	8	6	4
Bahan D	3 kg	1.5 kg	0.6 kg	0.6 kg	0.4 kg	0.6 kg	10	6	4
Bahan E	1 kg	0.5 kg	0.2kg	0.3 kg	0.2 kg	0.3 kg	5	3	1
Bahan F	1 kg	0.5 kg	0.2 kg	1.5 kg	1 kg	1.5 kg	8	2	1
Bahan G	4 kg	2 kg	1 kg	2 kg	1 kg	2kg	17	7	5
Proses 1 (menit)	3 kg	0	0	10	0	0	720	0	0
Proses 2 (menit)	3 kg	0	0	30	0	0	1800	0	0
Proses 3 (menit)	3 kg	0	0	10	0	0	720	0	0
Kesimpulan	15000			10000					

Variabel Keputusan : x_1 = Produk A

x_2 = Produk B

Kasus tersebut dapat sebagai berikut :

Maksimumkan : $Z = 15000x_1 + 10000x_2$

Dengan Kendala :

$$(4,2,1)x_1 + (3,2.5,1.5)x_2 \le (20,10,5)$$
$$(3,1.5,0.6)x_1 + (1.5,1,0.5)x_2 \le (20,10,5)$$
$$(1.7,0.5,0.3)x_1 + (0.5,0.4,0.1)x_2 \le (8,6,4)$$
$$(3,1.5,0.6)x_1 + (0.6,0.4,0.2) \le (10,6,4)$$
$$(1,0.5,0.2)x_1 + (0.3,0.2,0.1)x_2 \le (5,3,2)$$
$$(1,0.5,0.2)x_1 + (1.5,1,0.5)x_2 \le (8,3,2)$$
$$(4,2,1)x_1 + (2,1.5,0.5)x_2 \le (17,7,5)$$
$$3x_1 + 10x_2 \le 720$$
$$3x_1 + 30x_2 \le 1800$$
$$20x_1 + 10x_2 \le 720$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Permasalahan pada kasus di atas, program linear *fuzzy* di ubah ke dalam program linear seperti pada langkah 1 tahap ke-2, maka akan diperoleh formulasi baru seperti pada tahap ke-3 dimana μ = 0 sehingga formulasi tersebut dapat dituliskan kembali seperti berikut :

Maksimumkan : $Z = 15000x_1 + 10000x_2$

Dengan Kendala :

$$4x_1 + 3x_2 \le 20$$
$$3x_1 + 1.5x_2 \le 20$$
$$1.7x_1 + 0.5x_2 \le 8$$
$$3x_1 + 0.6x_2 \le 10$$
$$1x_1 + 0.3x_2 \le 5$$
$$1x_1 + 1.5x_2 \le 8$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 17$$
$$2x_1 + 0.5x_2 \le 10$$
$$1.5x_1 + 0.5x_2 \le 10$$
$$1.2x_1 + 0.1x_2 \le 2$$
$$1.5x_1 + 0.2x_2 \le 4$$
$$0.5x_1 + 0.1x_2 \le 2$$
$$0.5x_1 + 0.5x_2 \le 5$$
$$2x_1 + 0.5x_2 \le 10$$
$$5x_1 + 4.5x_2 \le 25$$
$$3.6x_1 + 2x_2 \le 25$$
$$2x_1 + 0.6x_2 \le 12$$
$$3.6x_1 + 2x_2 \le 14$$
$$1.2x_1 + 0.4x_2 \le 7$$
$$1.2x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$3x_1 + 10x_2 \le 720$$
$$3x_1 + 30x_2 \le 1800$$
$$20x_1 + 1x_2 \le 720$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan metode simpleks. Solusi optimum yang diperoleh Z = Rp. 60714.29, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$

Apabila diambil μ=1,maka program linear *fuzzy* kembali ke dalam bentuk program linear sebagai berikut :

Maksimumkan : $Z = 15000x_1 + 10000x_2$

Dengan Kendala :

$$
\begin{aligned}
&4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
&3x_1 + 1.5x_2 \leq 20 \\
&1.7x_1 + 0.5x_2 \leq 8 \\
&3x_1 + 0.6x_2 \leq 10 \\
&1x_1 + 0.3x_2 \leq 5 \\
&1x_1 + 1.5x_2 \leq 8 \\
&4x_1 + 2x_2 \leq 17 \\
&3x_1 + 10x_2 \leq 720 \\
&3x_1 + 30x_2 \leq 1800 \\
&20x_1 + 1x_2 \leq 720 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Maka, solusi optimum yang diperoleh adalah Z = Rp. 71212.12, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

D. Kesimpulan

1. Berdasarkan hasil pembahasan dapat ditarik kesimpulan bahwa dalam memodelkan permasalahan program linear *fuzzy* secara umum sama halnya seperti memodelkan program linear biasa, namun dalam program linear *fuzzy* parameter yang ada pada koefisien dan konstanta sebelah kanan berbentuk bilangan *fuzzy*.
2. Dalam menyelesaikan permasalahan program linear *fuzzy* dengan koefisien dan konstanta sebelah kanan berbentuk bilangan triangular *fuzzy* ada dua tahap yang harus dilakukan agar permasalahan tersebut dapat terselesaikan. Pada tahap pertama bilangan triangular fuzzy harus diurutkan terlebih dahulu dengan menggunakan partial order agar diperoleh formulasi program linear *fuzzy* yang baru. Selanjutnya pada tahap ke dua formulasi program linear *fuzzy* yang baru diubah ke bentuk standar program linear sehingga dapat diselesaikan seperti program linear biasa dengan menggunakan metode simplek dan solusi optimal yang diperoleh berupa bilangan real.
3. Dari hasil studi kasus solusi optimal yang diperoleh dari permasalahan program linear *fuzzy* dapat dikatakan lebih relasitis karena mempertimbangkan batasan yang tidak diketahui secara jelas, seperti naik atau turunya jumlah produksi dan kapasitas bahan baku. Solusi optimal dari kasus di atas untuk =1 permasalahan program linear *fuzzy* akan kembali menjadi program linear biasa sehingga diperoleh Z = Rp. 60714.29, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ dan untuk $\mu = 0$ solusi optimum diperoleh Z= Rp. 71212.12, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Daftar Pustaka

Yuan, G. J. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Application* . Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall PTR.

Afriani, A. T. (2012). Metode Simpleks Fuzzy Untuk Permasalahan Pemrograman Linear Dengan Variabel Trapezoidal Fuzzy. *Buletin Ilmiah Mat. Stat dan Terapannya (Bimaster) Volume 01, No.1 , 23-30.*

SJ, S. F. (2006). *Himpunan & Logika Kabur serta Aplikasinya. Yogyakarta*: Graha Ilmu. Firmansyah, Ade. (2007). Program Linear Dengan Fungsi Tujuan Tunggal. Bandung: Universitas Islam Bandung.

Kusumadewi, S. (2010). *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan* . *Yogyakarta* : Graha Ilmu.

Munir, R. (2005). *Matematika Diskrit* . Bandung : Informatika Bandung .

Mansur, Y. M. (1995). *Fuzzy Sets and Economics*. Northampton, MA, USA: Edward Elgar. Tahir Ahmad, M. K. (2011). Fully Fuzzy Linear Programming (FFLP) with a Apecial Ranking Function for Selection of Substitute Activities in Project Management . *International Journal of Applied Science and Technology* , 234-246.